



# Contribution à l'étude et la simulation du procédé l'hydroformage

Mehdi Ben Tahar

## ► To cite this version:

Mehdi Ben Tahar. Contribution à l'étude et la simulation du procédé l'hydroformage. Sciences de l'ingénieur [physics]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. Français. NNT : 2005ENMP1309 . pastel-00001532

**HAL Id: pastel-00001532**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001532>**

Submitted on 16 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



*N° attribué par la bibliothèque*

\_\_\_\_\_

pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Ecole des Mines de Paris**  
Spécialité «Mécanique Numérique»

M. BEN TAHAR Mehdi

Soutenue le 23 septembre 2005

# CONTRIBUTION A L'ETUDE ET LA SIMULATION DU PROCEDE D'HYDROFORMAGE

Jury :

M. J.-L BATOZ	Président
Mme. N. BOUDEAU	Rapporteur
M. P.-Y MANACH	Rapporteur
M. H. BEL HADJ SALAH	Examineur
M. P. DUROUX	Examineur
Mme. E. MASSONI	Directeur de thèse



## *Remerciements*

Je tiens à exprimer mes remerciements à la direction du Centre de Mise en Forme des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, de m'avoir donné l'opportunité d'effectuer ce travail de thèse.

Je tiens également à témoigner de ma reconnaissance envers mon directeur de thèse Elisabeth MASSONI pour sa confiance, l'intérêt qu'elle a porté à mon travail, son accessibilité et ses qualités humaines. Egalement merci à Michel BELLET de m'avoir accueilli dans l'équipe TMP et à Yvan CHASTELLE d'avoir accepté de relire les premiers chapitres de ce manuscrit.

Egalement, je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur Jean Louis BATOZ d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, Madame Nathalie BOUDEAU et Monsieur Pierre Yves MANACH d'avoir accepté de rapporter ce travail, également mes remerciements s'adressent à Monsieur Hédi BEL HADJ SALAH et Monsieur Patrick DUROUX pour avoir examiné ce manuscrit.

Je témoigne ici de ma plus grande reconnaissance et profonde gratitude à mes parents pour leur soutien continu et leur appui à toute épreuve. Cette thèse leurs est dédiée...

A mon cher frère et ma chère sœur mes chaleureux remerciements pour leur appui, leur encouragement et mes sincères souhaits de réussite à mon frère pour ses débuts en recherche.

Faisant partie du projet Européen 3D-structures, j'exprime également mes remerciements à tous les partenaires (Massimo, Peter, Rosanna, Jonny, Antonio...) pour les échanges tant techniques que conviviaux que j'ai pu avoir avec eux tout au long de ce travail.

Un grand merci à Marie Françoise GUENEGAN et Sylvie MASSOL pour leur disponibilité et bonne humeur ainsi qu'à Brigitte HANOT et Sylvie MICHEL. Merci à Emmanuel LEVRAT pour sa serviabilité, à Suzanne JACOMET pour son aide sur le logiciel Aramis ainsi qu'à Francis FOURNIER et Alain LE FLOC'H pour la réalisation et la mise au point de la machine de gonflage.

Il va sans dire que je remercie tout ceux que j'ai pu côtoyer durant mon séjour au CEMEF je pense à Céline PELISSOU, Arnaud RISS, Christian LANGE, Mehdi LAROUSSI, Josué BARBOSA, Frédéric COSTE, Laurent TERZOLOT, Cédric CHAMPIN, Olga KARASSEVA, Cyril GRUAU, Olivier BASSET, Stéphane CASSARINI.

Un merci à tous mes amis en particulier à Salah BOUSBIA, Abdelbasset HAMDI, Walid BEN AHMED, Ahmed KHAMASSI, Ramzy BOUSSETTA, Nader RAHMOUNI, Bassem BEL HADJ YAHIA.





*A Mes Parent.*



# TABLE DES MATIERES

<b>Chapitre 1 Introduction générale</b>	<b>- 1 -</b>
1.1. Contexte global .....	- 2 -
1.2. Les différents procédés d'hydroformage .....	- 3 -
1.3. L'étude et la modélisation de l'hydroformage .....	- 6 -
1.4. Contexte de la thèse .....	- 7 -
1.5. Objectifs de la thèse .....	- 7 -
1.6. Plan du manuscrit .....	- 8 -
Références .....	- 9 -
<b>Chapitre 2 Caractérisation expérimentale du comportement des tôles</b>	<b>- 11 -</b>
2.1. Introduction.....	- 12 -
2.2. Modélisation des lois de comportement élasto-plastiques .....	- 13 -
2.2.1. Formulation de la loi élasto-plastique .....	- 13 -
2.2.2. Critères de plasticité .....	- 15 -
2.2.2.1. Critère isotrope de von Mises .....	- 15 -
2.2.2.2. Critères anisotropes .....	- 16 -
2.2.3. Analyse géométrique des critères de plasticité .....	- 22 -
2.2.3.1. Espaces de représentation des critères de plasticité .....	- 23 -
2.2.3.2. Condition de coaxialité entre le tenseur des contraintes et le tenseur taux des déformations .....	- 24 -
2.2.4. Ecrouissage et effet de la vitesse de déformation .....	- 27 -
2.2.4.1. Loi d'écrouissage.....	- 27 -
2.2.4.2. Effet de la vitesse de déformation.....	- 27 -
2.3. Caractérisation expérimentale.....	- 29 -
2.3.1. Essais de traction .....	- 29 -
2.3.2. Essai de cisaillement .....	- 33 -
2.3.2.1. Généralité .....	- 33 -
2.3.2.2. Analyse mécanique homogène de l'essai de cisaillement.....	- 34 -
2.3.2.3. Dépouillement de l'essai.....	- 39 -
2.3.2.4. Limites du modèle homogène.....	- 40 -
2.3.3. Essai de gonflage circulaire.....	- 45 -
2.3.3.1. Généralités .....	- 45 -
2.3.3.2. Etude d'un essai de gonflage circulaire: modélisation analytique .....	- 45 -
2.3.3.3. Procédure expérimentale .....	- 53 -
2.3.3.4. Dépouillement et résultats .....	- 56 -
2.3.3.5. Identification des courbes d'écrouissage .....	- 58 -
2.4. Conclusion .....	- 67 -
Références .....	- 68 -
<b>Chapitre 3 Etude de la formabilité et modélisation de la striction</b>	<b>- 73 -</b>
3.1. Introduction : la striction en mise en forme des tôles .....	- 75 -
3.2. Détermination expérimentale des CLF .....	- 76 -
3.2.1. Les tests utilisés pour la détermination des CLF .....	- 77 -
3.2.1.1. Test Marciniak.....	- 77 -
3.2.1.2. Test Nakazima .....	- 77 -
3.2.1.3. Test avec éprouvettes entaillées.....	- 77 -
3.2.1.4. Test de gonflage hydraulique.....	- 78 -

3.2.2. Système de mesure des déformations .....	- 78 -
3.2.3. Définition de la limite de formabilité .....	- 78 -
3.2.4. Détermination expérimentale des Courbes Limites de Formage par des essais de gonflage.....	- 79 -
3.2.4.1. Procédure expérimentale .....	- 79 -
3.2.4.2. Résultats .....	- 81 -
3.3. Critères analytiques d'apparition de la striction .....	- 84 -
3.3.1. Critères d'instabilité plastique .....	- 84 -
3.3.1.1. Critère de Considère .....	- 84 -
3.3.1.2. Critère de Swift.....	- 85 -
3.3.1.3. Critère de Hill .....	- 87 -
3.3.1.4. Critère de Ramaekers.....	- 88 -
3.3.1.5. Critère de Force Maximum Modifié.....	- 90 -
3.3.2. Modèle de Marciniak et Kuczynski (M-K) .....	- 90 -
3.3.3. Méthode de Perturbation .....	- 94 -
3.3.4. Analyse de bifurcation.....	- 97 -
3.3.5. Synthèse .....	- 101 -
3.4. Analyse de l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation .....	- 105 -
3.4.1. Analyse de Hart .....	- 105 -
3.4.1.1. Eprouvette à section homogène .....	- 105 -
3.4.1.2. Evolution d'un défaut .....	- 107 -
3.4.2. Méthode du défaut initial.....	- 110 -
3.4.3. Approche de Ghosh .....	- 111 -
3.4.4. Synthèse .....	- 112 -
3.5. Etude du Critère de Force Maximum Modifié (CFMM) .....	- 113 -
3.5.1. Définition du critère .....	- 113 -
3.5.1.1. Expression du modèle pour un critère de von Mises .....	- 116 -
3.5.1.2. Expression du CFMM pour un critère de Hill48 .....	- 116 -
3.5.1.3. Expression du CFMM pour un critère de Hosford(1979).....	- 117 -
3.5.2. Interprétation graphique du CFMM pour un matériau sans sensibilité à la vitesse de déformation -	117 -
3.5.3. Effet du critère de plasticité.....	- 118 -
3.5.3.1. Modèle M-K .....	- 118 -
3.5.3.2. CFMM.....	- 120 -
3.5.4. Effet du chemin de déformation .....	- 122 -
3.5.5. Etude de l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation .....	- 128 -
3.5.5.1. Influence du terme au numérateur ( $m \hat{g} / g$ ) .....	- 130 -
3.5.5.2. Influence du terme au dénominateur : $m \ddot{\epsilon}_1 / \dot{\epsilon}_1^2$ .....	- 132 -
3.6. Application du CFMM et comparaison avec les CLF expérimentales.....	- 134 -
3.7. Conclusion .....	- 138 -
Références .....	- 139 -
<b>Chapitre 4 Présentation de Forge3® pour la simulation de la mise en forme de produits minces</b> .....	<b>- 145 -</b>
4.1. Introduction.....	- 146 -
4.2. Description du mouvement.....	- 146 -
4.3. Equations de conservation .....	- 147 -
4.4. Conditions aux limites.....	- 147 -
4.5. Loi de comportement élasto-plastique continue.....	- 149 -
4.6. Formulation faible du problème .....	- 151 -
4.6.1. Formulation faible continue ou principe des travaux virtuels .....	- 151 -
4.6.2. Formulation discrète.....	- 152 -
4.6.3. Discrétisation temporelle.....	- 154 -
4.6.4. Gestion incrémentale du contact.....	- 158 -

4.6.5. Intégration de la loi de comportement.....	- 159 -
4.6.5.1. Ecriture incrémentale.....	- 160 -
4.6.5.2. Intégration du critère quadratique de Hill.....	- 161 -
4.6.5.3. Dérivée objective de la contrainte.....	- 163 -
4.7. Maillage et remaillage.....	- 164 -
4.7.1. Position du Problème.....	- 164 -
4.7.2. Choix du mailleur.....	- 164 -
4.7.3. Etude du mailleur à plan moyen.....	- 166 -
4.7.3.1. Principe.....	- 166 -
4.7.3.2. Procédure de remaillage.....	- 167 -
4.7.3.3. Le transport.....	- 170 -
4.7.4. Exemple : emboutissage d'un pied milieu.....	- 171 -
4.8. Conclusion.....	- 174 -
Références.....	- 175 -
<b>Chapitre 5 Simulation numérique du procédé d'hydroformage</b>	<b>- 177 -</b>
5.1. Introduction.....	- 178 -
5.2. Résolution du problème d'équilibre : cas de l'hydroformage.....	- 178 -
5.3. Intégration implicite.....	- 179 -
5.4. Méthodes de continuation.....	- 185 -
5.4.1. Introduction.....	- 185 -
5.4.2. Principe de la méthode pour une formulation en déplacement.....	- 187 -
5.4.3. Les différentes méthodes de continuation.....	- 190 -
5.4.3.1. Méthode de contrôle de déplacement.....	- 190 -
5.4.3.2. Méthode de la longueur d'arc sphérique.....	- 191 -
5.4.3.3. Méthode de la longueur d'arc cylindrique.....	- 192 -
5.4.3.4. Méthode de la longueur d'arc linéarisée.....	- 192 -
5.4.4. Développement de méthodes de continuation pour une formulation vitesse-pression (Forge3®)-	194
-	-
5.4.4.1. Adaptation et notations.....	- 194 -
5.4.4.2. Formulation détaillée.....	- 196 -
5.4.4.3. Mise en œuvre de la méthode.....	- 200 -
5.4.4.4. Validation de la méthode.....	- 205 -
5.4.4.5. Effet de la longueur d'arc.....	- 207 -
5.4.4.6. Evaluation de la convergence au sens des éléments finis.....	- 208 -
5.4.4.7. Comparaison des trois méthodes de continuation.....	- 210 -
Références.....	- 213 -
<b>Chapitre 6 Application à l'étude du procédé d'hydroformage</b>	<b>- 216 -</b>
6.1. Introduction.....	- 217 -
6.2. Etude du procédé d'hydroformage de flan doubles.....	- 217 -
6.2.1. Technologie.....	- 217 -
6.2.1.1. Système d'injection.....	- 218 -
6.2.1.2. Choix de la combinaison des matériaux.....	- 219 -
6.2.2. Simulation.....	- 221 -
6.3. Etude de l'hydroformage de flans simples.....	- 224 -
6.3.1. Etude d'un essai de gonflage circulaire.....	- 224 -
6.3.1.1. Influence du coefficient d'anisotropie $r$ .....	- 224 -
6.3.1.2. Influence du coefficient de sensibilité à la vitesse.....	- 226 -
6.3.2. Validation du critère de Force Maximum Modifié.....	- 227 -
6.3.2.1. Essais de gonflage en matrices elliptiques.....	- 227 -
6.3.2.2. Essais de gonflage annulaire.....	- 231 -
6.3.3. Gonflage d'une boîte de forme annulaire.....	- 234 -
6.3.4. Cas d'une pièce de carrosserie d'automobile.....	- 237 -

6.4. <i>Hydroformage de tube</i> .....	- 239 -
6.4.1. Etude du gonflage d'un tube de longueur finie .....	- 239 -
6.4.2. Etude de l'effet du chemin de déformation .....	- 242 -
6.5. <i>Soufflage de bouteille en polymère</i> .....	- 244 -
<i>Références</i> .....	- 246 -
<b>Conclusion et perspectives</b> .....	<b>- 248 -</b>
<b>Annexe A</b> .....	<b>- 253 -</b>
<b>Annexe B</b> .....	<b>- 256 -</b>
<b>Annexe C</b> .....	<b>- 259 -</b>

# *Chapitre 1*

## *Introduction générale*

<b>Chapitre 1 .....</b>	<b>- 1 -</b>
1.1. Contexte global .....	- 2 -
1.2. Les différents procédés d'hydroformage .....	- 3 -
1.3. L'étude et la modélisation de l'hydroformage .....	- 6 -
1.4. Contexte de la thèse .....	- 7 -
1.5. Objectifs de la thèse .....	- 7 -
1.6. Plan du manuscrit .....	- 8 -
Références .....	- 9 -



## ***1.1. Contexte global***

Sous l'impulsion des accords de Kyoto sur la réduction des émissions des gaz à effet de serre, le secteur automobile c'est vu dans l'obligation de revoir ses méthodes et ses technologies de production pour pouvoir satisfaire aux nouvelles normes environnementales. Réduire la consommation du carburant est un moyen immédiat pour réduire l'émission des gaz polluants. C'est là donc un moyen d'action majeur puisqu'on estime à 15% le gain en consommation lorsque la masse du véhicule est réduite de 25% [Vos, 2005].

Les besoins de réduction du poids se sont concrètement traduits par l'introduction de nouvelles nuances plus légères dans les structures automobiles. Ainsi, des alliages d'aluminium ont commencé à être intégrés dans les pièces de structure de plusieurs véhicules. Outre l'aluminium, de nouvelles nuances d'acier à haute limite élastique se sont également développées offrant ainsi un ratio résistance par masse spécifique meilleur que les aciers conventionnels.

Réduire le poids ne concerne pas seulement le développement de nouveaux matériaux plus légers et plus performants, mais également la réduction du nombre de pièces élémentaires. Ainsi la réduction du nombre de pièces de structure entraîne systématiquement la réduction de la matière première utilisée, de cordon de soudure, voire de flan n'ayant comme seule utilité que des exigences du procédé de soudage.

Toutefois, la production de géométries complexes en une seule pièce, n'est souvent pas faisable avec le procédé conventionnel d'emboutissage. De ce fait, le procédé d'hydroformage a été introduit comme une technologie alternative.

On regroupe sous le nom du procédé d'hydroformage des technologies aussi diverses que variées, toutes reposant sur le même principe à savoir l'exploitation de l'action d'un liquide sous pression pour la mise en forme d'une pièce primaire qui peut être un tube, un flan ou un double flan.

## 1.2. Les différents procédés d'hydroformage

### a. L'hydroformage de tubes

L'hydroformage de tube a été le premier procédé d'hydroformage à être développé et utilisé dans de nombreuses applications industrielles. Cette technique de mise en forme utilise la force motrice d'un fluide sous pression qui, injecté à l'intérieur d'un tube, permet de le déformer plastiquement par expansion. Un effort de compression généré par deux vérins, est généralement appliqué sur les deux extrémités du tube permettant ainsi un apport de matière à la zone déformée (Figure 1.1). Cet apport a pour effet de compenser l'amincissement du tube et d'améliorer sa formabilité [Gelin et al, 2001]. Cette technologie trouve aujourd'hui de plus en plus d'applications pour les pièces automobiles telles que les longerons, les collecteurs d'échappement, les berceaux support moteur, l'habitacle.. (Figure 1.2).

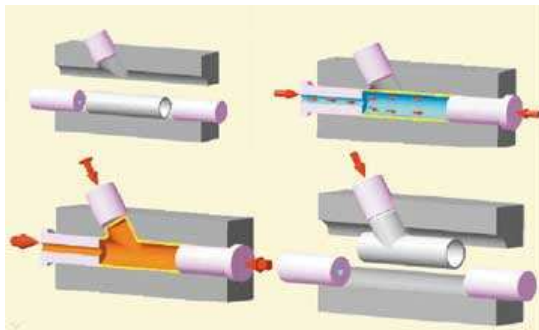


Figure 1.1 : Principe du procédé d'hydroformage de tube.

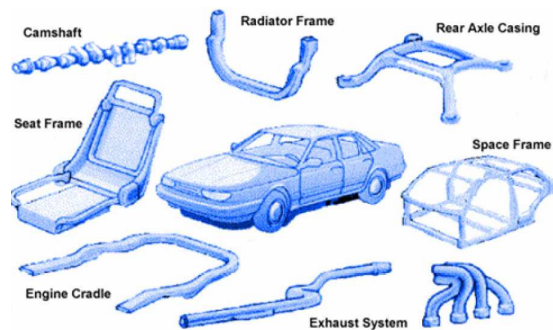


Figure 1.2 : Application du procédé d'hydroformage de tube [Lundqvist, 2004].

### b. L'hydroformage de flan simple

Le procédé de base consiste en l'application d'une pression sur une tôle pouvant s'avaloir sur le bord d'une matrice. Par rapport à un procédé d'emboutissage, le liquide en hydroformage, peut jouer le rôle du poinçon (Figure 1.3), ou de la matrice (Figure 1.4). Ainsi, dans le premier cas, la tôle est formée contre une matrice qui lui confère la forme finale [Siegert et al, 2000]. En revanche, dans le deuxième procédé, la tôle est déformée sous l'action conjuguée d'un poinçon en déplacement et d'un liquide pressurisé. A la fin du procédé, la tôle épouse la forme du poinçon [Thiruvarduchelvan et al, 2003].

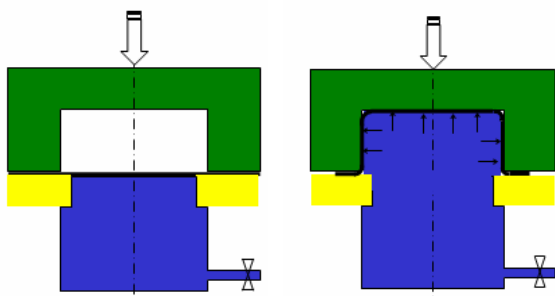


Figure 1.3 : Principe d'hydroformage de flan simple.

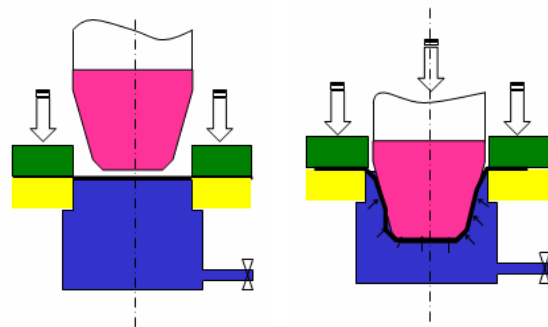


Figure 1.4 : Principe du formage hydromécanique.

### c. L'hydroformage de flans doubles

Au cours de ce procédé, deux plaques sont formées simultanément à l'intérieur d'une même matrice comportant une partie supérieure et une partie inférieure (Figure 1.5). Cette technologie a l'avantage de produire deux pièces simultanées, offrant ainsi un gain de temps appréciable par rapport au procédé d'hydroformage de flans simples. L'exploitation de cette technologie concerne principalement la production de pièces creuses et fermées : triangle de suspension (Figure 1.6), berceau de moteur, réservoir...

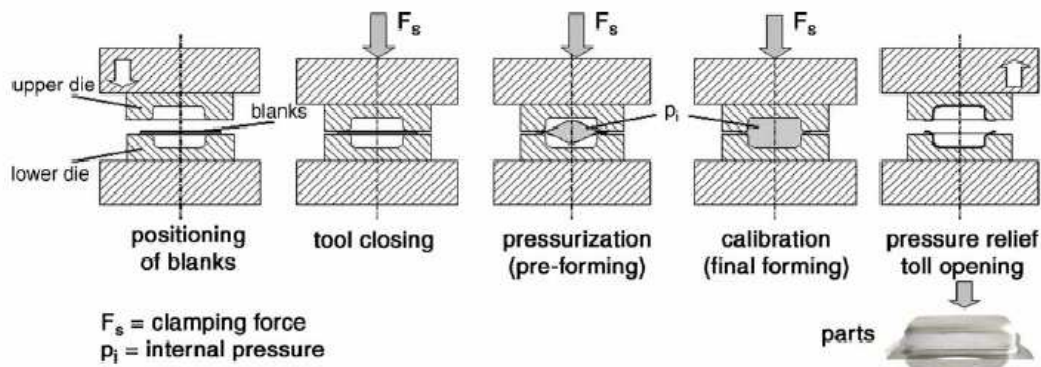


Figure 1.5 : Procédé d'hydroformage de flans doubles [Groche et al, 2004].

Dans la pratique, deux solutions technologiques peuvent être envisagées en hydroformage de flans doubles [Hein et al, 1999]. La première consiste à partir de deux flans préalablement soudés sur leur contour et formant une pièce monolithique étanche, cette préforme est ensuite gonflée dans une matrice à deux blocs. Il est également possible de partir avec deux tôles séparées, les mettre en forme dans une même matrice fermée et finir par une opération de soudage.



Figure 1.6: Triangle de suspension produit par hydroformage de flans doubles.

D'autres technologies d'hydroformage ont été développées au fil du temps et en fonction des besoins industriels spécifiques. Les travaux de [Zhang, 1999], [Siegert et al, 2000] et [Lang et al, 2004] dressent l'inventaire de ces principales technologies.

D'une manière générale, l'hydroformage offre de nombreux avantages :

Une diminution du nombre de pièces et donc un gain en temps d'assemblage et de soudage. A titre d'exemple, le collecteur d'échappement constitue l'une des pièces phares réalisée par hydroformage de tube. Ainsi « Schuler hydroforming » estime à 50% la réduction du nombre de pièces, à 25% le coût de production, à 25% le gains en poids et 60% le coût d'outillage.

La mise en forme de pièces complexes avec une très bonne reproductibilité et stabilité dimensionnelle (ex. arbre à cames).

Une répartition plus homogène des épaisseurs du fait de l'absence de contact avec un poinçon [Kang et al, 2004].

Une plus grande rigidité des pièces finales, résultat de la réduction du nombre de pièces et de cordons de soudure. A titre d'exemple, l'intégration de certaines pièces hydroformées dans la structure d'un véhicule Freelander a révélé une amélioration de 25% de la rigidité totale de la structure à la torsion [Walia et al, 1999].

Une réduction des coûts d'outillage puisque seule une matrice femelle est nécessaire. Egalement, plusieurs épaisseurs de tôles peuvent être utilisées pour les mêmes outillage et ce moyennant quelques ajustements.

En dépit des avantages cités, l'hydroformage présente certaines limitations aussi bien d'ordre technologique qu'économique :

En hydroformage, la pression est uniformément répartie sur la surface de la pièce. Dans la mesure où des pressions élevées peuvent être mises en jeu sur des surfaces également importantes, très vite les efforts de serrage deviennent conséquents et les presses peuvent atteindre des dimensions considérables (jusqu'à 100 000 KN). L'investissement initial dans de telles installations s'avère coûteux et limite donc l'exploitation étendue de cette technologie (Figure 1.7).

Les trois phases (remplissage, gonflage et calibrage) qui constituent le procédé d'hydroformage, sont relativement lentes. Le cycle (30s à 90s) de cette technologie l'exclut de la production en grande série.

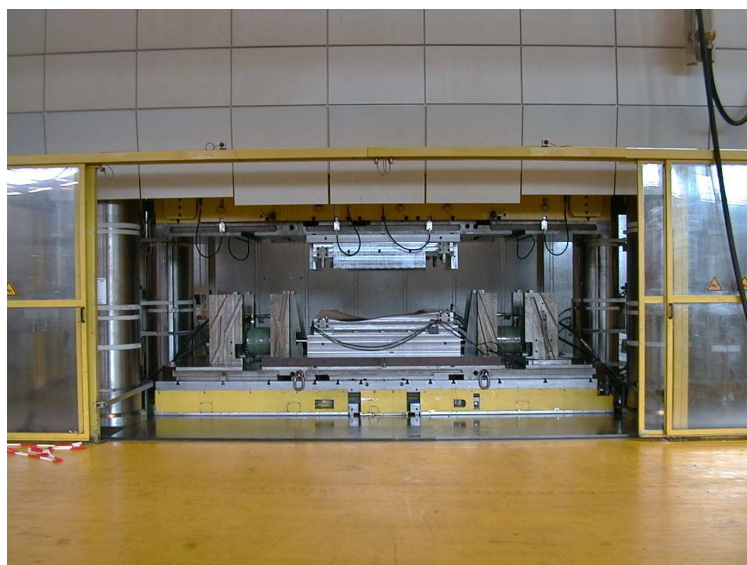


Figure 1.7 : Exemple de presse utilisée en hydroformage (Schuler).

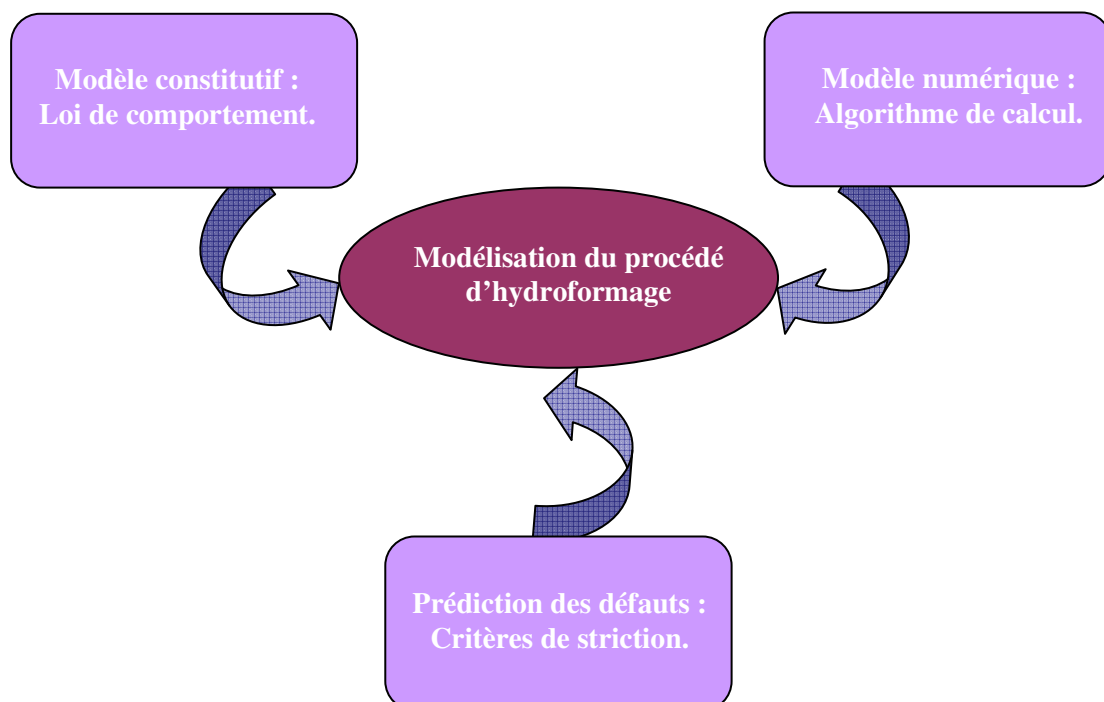
### 1.3. L'étude et la modélisation de l'hydroformage

Si le procédé d'hydroformage est fort de ses avantages technologiques, il n'en demeure pas moins qu'une bonne maîtrise de ce procédé est vitale pour son développement. Dans un contexte industriel de plus en plus compétitif, les constructeurs automobiles sont amenés à réduire les délais de conception et les coûts de développement de leurs nouveaux produits et procédés tel l'hydroformage. La simulation numérique est devenue aujourd'hui un outil incontournable pour répondre à ces besoins en réduisant le nombre de campagne d'essais, les coûts d'outillage et les délais de conception.

La striction, la rupture et le plissement sont les principaux modes de défaillance qui entraînent le rebut systématique des pièces. C'est pourquoi, améliorer la prédiction d'apparition de ces défauts lors de la simulation va dans le sens d'une meilleure maîtrise du procédé.

Parallèlement au gain indéniable en temps que peuvent offrir les simulations numériques, la compétitivité exige de cet outil de plus en plus de fiabilité et de précision. La réalisation de cet objectif passe nécessairement par :

1. La définition de lois constitutives du modèle numérique capables de décrire le plus fidèlement le comportement mécanique réel du matériau. Ainsi, en mise en forme des produits minces, et en hydroformage en particulier, les lois élasto-plastiques anisotropes sont indispensables pour la bonne description du comportement des tôles laminées. L'identification des paramètres de ces lois constitue un facteur déterminant dans la fiabilité des simulations.
2. L'algorithme de la méthode numérique doit être en mesure de simuler les conditions réelles du procédé et reproduire les différents phénomènes physiques qui peuvent s'y produire.
3. L'outil numérique doit disposer d'un outil complémentaire fiable et précis lui permettant de détecter les défauts qui peuvent survenir.



## 1.4. Contexte de la thèse

Cette thèse fait partie du projet Européen 3D-structure « Lighter and safer automotive structure » dont l'objectif est l'étude du procédé d'hydroformage de flans doubles ainsi que son potentiel d'application pour la production du coté latéral d'un habitacle de véhicule en uniquement deux pièces (intérieure et extérieure) (voir Figure 1.8).

Ce projet a rassemblé plusieurs partenaires industriels et académiques:

- *Volvo Car, Fiat Research Center* : en charge de la définition des besoins fonctionnels et de la simulation numérique.
- *Schuler Hydroforming* : en charge de l'implémentation technologique,
- *Delfosud* : en charge de la réalisation des outillages en collaboration avec Schuler,
- *Alcan* : fournisseur des tôles en alliage d'aluminium (AA5754, AA6016),
- *Arcelor* : fournisseur des tôles en aciers (DC04, DP450, TRIP800),
- *RISOE*: en charge de la caractérisation des matériaux par essais de traction et Marciniak,
- *LFT de l'université d'Erlangen* : en charge de proposer des modèles simplifiés d'aide à la conception,
- *CEMEF de l'Ecole des Mines* : en charge de la caractérisation de la formabilité des tôles et de la modélisation.

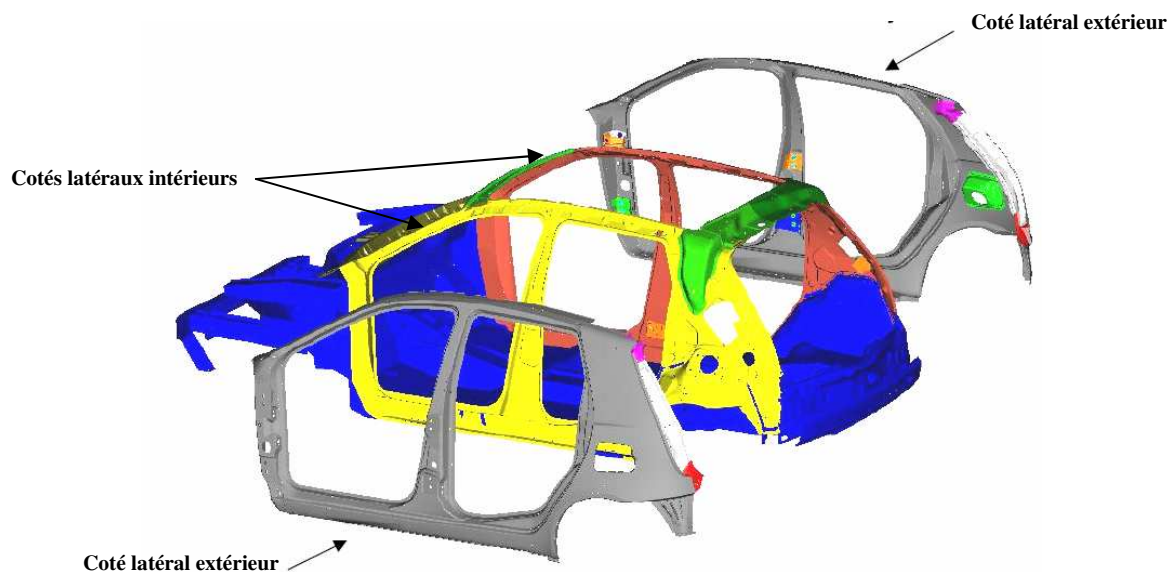


Figure 1.8 : Vue éclatée de la structure latérale d'un véhicule.

## 1.5. Objectifs de la thèse

Ce travail a pour objectif de contribuer à la modélisation du procédé d'hydroformage de flan. Cette contribution s'articule autour des trois problématiques soulignées plus haut (caractérisation rhéologique, prédiction des défauts, algorithme pour la simulation numérique du procédé d'hydroformage) et qui seront abordées dans les différents chapitres du manuscrit.

## **1.6. Plan du manuscrit**

Le manuscrit est divisé en six chapitres. Après le chapitre introductif, le deuxième chapitre sera consacré à l'identification des courbes d'écrouissage en grandes déformations. Après une présentation de la théorie du comportement élasto-plastique anisotrope, le test de cisaillement double (test Miyauchi) et l'essai de gonflage circulaire seront étudiés et utilisés pour la caractérisation des matériaux.

Le défaut de striction localisée se manifeste par un amincissement localement élevé et conduit à la rupture de la pièce. Il constitue un des défauts qui peuvent apparaître lors de l'hydroformage (ou l'emboutissage). Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de ce problème. L'étude comportera deux volets, un premier sera consacré à la caractérisation expérimentale pour la détermination des Courbes Limites de Formage (CLF). Le deuxième volet est relatif à la modélisation mathématique de la striction. Une étude bibliographique comparative nous permettra de dresser les principaux modèles de striction. Parmi ceux-ci, notre intérêt a porté sur le Critère de Force Maximum Modifié (CFMM). On introduira dans ce critère l'effet de la sensibilité à la vitesse, on abordera l'influence du critère de plasticité et des chemins de déformation. Une confrontation entre les prédictions du CFMM et les CLF expérimentales mesurées sera présentée.

Partant du logiciel Forge3®, on aborde dans le chapitre quatre le formalisme mathématique du problème d'équilibre et sa résolution. On présentera les modifications apportées au code pour l'adapter à la simulation des produits minces : maillage et remaillage, implémentation du critère de plasticité anisotrope de Hill48.

L'objectif du cinquième chapitre est l'amélioration de la simulation numérique du procédé d'hydroformage. Pour ce faire, nous commençons par considérer la méthode de contrôle de pression. Dans un souci d'amélioration de cette méthode, nous avons implémenté les dérivées de domaines avec une actualisation itérative du maillage.

Certains matériaux peuvent présenter un potentiel de déformation supplémentaire situé dans la phase instable du procédé (typiquement sur un essai de gonflage circulaire, la phase instable débute à partir du pic de pression et se prolonge jusqu'à la rupture). La méthode standard de résolution par contrôle de pression est réputée inapplicable pour décrire ces processus instables. C'est pourquoi nous avons implémenté de nouvelles méthodes, dite de continuation.

Le dernier chapitre a pour vocation de valider les développements présentés dans les chapitres précédents. Nous y présenterons quelques tests simples de gonflage ainsi qu'un cas plus complexe d'hydroformage de flan.

## Références

- Gelin, J. C.; Labergère, C. (2001), *Modelling, optimization and optimal control for hydroforming process*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> international ESAFORM Conference on Material Forming- Volume 1, Liège, Belgium (2001) pp. 377-380.
- Groche, P.; Metz, C. (2004), *Hydroforming of unwelded metal sheets using active-elastic tools*, Journal of Materials Processing Technology, revised 12 november (2004), in press.
- Hein, P.; Vollertsen, F. (1999), *Hydroforming of sheet metal pairs*. J. Mat. Proc. Tech.87 , (1999), pp. 154-164.
- Kang, B. S.; Son, B. M.; Kim, J. (2004), *A comparative study of stamping and hydroforming processes for automobile fuel tank using FEM*. International Journal of Machine Tools & Manufacture 44 (2004), pp. 87-94.
- Lang, L.H.; Wang, Z. R.; Kang, D. C.; Yuan, S. J.; Zhang, S. H.; Danckert, J.; Nielsen, K. B (2004), *Hydroforming highlights: sheet hydroforming and tube hydroforming*, Journal of Materials Processing Technology 151 (2004), pp. 165-177.
- Lundqvist, J. (2004), *Numerical simulation of tube hydroforming, adaptative loading paths*. Thèse de doctorat, Lulea University of Technology, Sweden.
- Thiruvarudchelvan, S.; Travis, F.W. (2003), *Hydraulic-pressure-enhanced cup-drawing processes*. Journal of Material Processing Technology 140 (1-3), (2003), pp. 117-123.
- Siebert, K.; Haussermann, M.; Losch, et al. (2000), *Recent developments in hydroforming technology*. Journal of Material Processing Technology 98 (2), (2000), pp. 251-258.
- Walia, S.; Gowland, S.; Hemmings, J.; Beckett, M.; Wakelin, P. (1999), *The engineering of a body structure with hydroformed components*. Society of automotive engineers, 1999-01-3181.
- Zhang, S. H. (1999), *Developments in hydroforming*. Journal of Materials Processing Technology 91 (1999), pp. 236-244.





# Chapitre 2

## Caractérisation expérimentale du comportement des tôles

2.1. Introduction.....	- 12 -
2.2. Modélisation des lois de comportement élasto-plastiques .....	- 13 -
2.2.1. Formulation de la loi élasto-plastique .....	- 13 -
2.2.2. Critères de plasticité .....	- 15 -
2.2.2.1. Critère isotrope de von Mises .....	- 15 -
2.2.2.2. Critères anisotropes .....	- 16 -
2.2.3. Analyse géométrique des critères de plasticité .....	- 22 -
2.2.3.1. Espaces de représentation des critères de plasticité .....	- 23 -
2.2.3.2. Condition de coaxialité entre le tenseur des contraintes et le tenseur taux des déformations .....	- 24 -
2.2.4. Ecrouissage et effet de la vitesse de déformation .....	- 27 -
2.2.4.1. Loi d'écrouissage.....	- 27 -
2.2.4.2. Effet de la vitesse de déformation.....	- 27 -
2.3. Caractérisation expérimentale.....	- 29 -
2.3.1. Essais de traction .....	- 29 -
2.3.2. Essai de cisaillement .....	- 33 -
2.3.2.1. Généralité .....	- 33 -
2.3.2.2. Analyse mécanique homogène de l'essai de cisaillement.....	- 34 -
2.3.2.3. Dépouillement de l'essai.....	- 39 -
2.3.2.4. Limites du modèle homogène.....	- 40 -
2.3.3. Essai de gonflage circulaire.....	- 45 -
2.3.3.1. Généralités .....	- 45 -
2.3.3.2. Etude d'un essai de gonflage circulaire: modélisation analytique .....	- 45 -
2.3.3.3. Procédure expérimentale .....	- 53 -
2.3.3.4. Dépouillement et résultats .....	- 56 -
2.3.3.5. Identification des courbes d'écrouissage .....	- 58 -
2.4. Conclusion .....	- 67 -
Références .....	- 68 -

## 2.1. Introduction

Le procédé d'élaboration de tôles métalliques le plus répandu est le laminage. De part sa nature, ce procédé confère aux grains constituant le matériau, une forte orientation suivant la direction de laminage. Il en résulte à la sortie, des tôles laminées marquées par un effet de fibrage à l'échelle microscopique et une texture, c'est à dire des orientations cristallographiques préférentielles.

L'étude du comportement de ces tôles est le plus souvent abordée dans le cadre d'une approche élasto-plastique pour la plupart des procédés de mise en forme de tôles. La théorie élasto-plastique comporte elle même deux approches différentes décrivant chacune d'elle une échelle physique du comportement: la première est appelée approche phénoménologique (ou macroscopique) et la deuxième est appelée approche microscopique (ou modèle micro-macro). Les deux approches visent à décrire l'évolution de l'état de contrainte et de déformation lors d'une succession de déformations.

Dans une approche phénoménologique, le comportement élasto-plastique du matériau est décrit par une enveloppe appelée surface de charge initiale. Définie dans l'espace des contraintes, cette surface fermée marque la limite élastique et le début de l'écoulement plastique du matériau pour les différentes configurations de chargement possibles, c'est une généralisation de la limite élastique uniaxiale. On introduit dans l'approche phénoménologique la notion du critère de plasticité qui n'est autre qu'une description mathématique de la forme de la surface de charge initiale. Ce critère peut être isotrope (critère de von Mises, Tresca, Hosford) ou anisotrope. Le critère de Hill48 [Hill, 1948] décrit aussi bien l'anisotropie générale que l'anisotropie orthotrope particulière aux tôles laminées. Il existe d'autres critères anisotropes [Hosford, 1979], [Barlat et al, 1991], [Barlat et al, 2000]) qui sont dédiés à la description de l'anisotropie orthotrope et qui se différencient entre eux par leur forme (fonctionnelle quadratique ou non quadratique), l'hypothèse de contrainte utilisée (contraintes planes, contraintes 3D), la prise en compte ou non des contraintes de cisaillement ainsi que par le nombre de paramètres utilisés dans ces critères.

Une fois la forme de la surface de charge initiale décrite par le critère de plasticité, l'approche phénoménologique introduit un modèle d'écrouissage permettant de décrire l'évolution de la forme, la taille et la position de la surface de charge initiale au cours de la déformation. Alors qu'un écrouissage isotrope conduit à l'expansion de la surface de charge sans aucune distorsion de sa forme, un écrouissage anisotrope, tel que l'écrouissage cinématique, décrit le déplacement de la surface de charge, sans distorsion, dans l'espace des contraintes [Koss, 1994]. Comme le modèle d'écrouissage est sensé décrire la mise à jour de la surface de charge initiale au cours du chargement, et que cette dernière est formée par un ensemble d'états de contraintes différents, il faut donc que cette mise à jour soit faite pour chacun des états de contrainte à une même valeur d'une variable interne qui peut être soit le travail d'écrouissage [Habraken, 2004], soit la déformation équivalente plastique d'écrouissage [Kuroda et al, 2000].

Après la définition de la surface de charge et du type d'écrouissage, la troisième hypothèse sur laquelle repose l'approche phénoménologique est relative à la description de l'écoulement plastique, c'est à

dire la description de la relation entre le tenseur taux de déformation d'un coté, le tenseur taux de contraintes et le tenseur des contraintes. On parle alors de loi d'écoulement plastique associée si le critère de plasticité est considéré comme étant le potentiel plastique, et de loi d'écoulement non associée si une deuxième fonction autre que le critère de plasticité est considérée (le plus souvent la fonction choisie est de la même forme mathématique que le critère de plasticité).

En revanche, dans une approche microscopique, les grandeurs macroscopiques telles que le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sont typiquement déduites de la modélisation numérique du comportement des grains constituant le matériau [Habraken, 2004]. Bien que cette approche soit plus consistante et plus proche de la physique de la déformation plastique, elle reste cependant d'une utilisation assez limitée et ce en raison d'un besoin de stockage et taille mémoire importants ainsi qu'un temps de calcul prohibitif. L'approche phénoménologique est plus répandue en raison de sa commodité, sa relative facilité de mise en œuvre, sa rapidité mais aussi souvent pour la précision suffisante de ses résultats. Par ailleurs, les deux approches peuvent être complémentaires dans la mesure où l'étude microscopique permet de comprendre les mécanismes de la déformation plastique et de valider des modèles phénoménologiques.

On se limitera dans le cadre de ces travaux à la *modélisation phénoménologie* de l'*anisotropie orthotrope* des tôles laminées en adoptant une loi *d'écoulement associée* et une *loi d'écrouissage isotrope*.

## 2.2. Modélisation des lois de comportement élasto-plastiques

### 2.2.1. Formulation de la loi élasto-plastique

Le comportement élasto-plastique repose sur une décomposition de la déformation totale apparente en une partie élastique réversible et une partie plastique irréversible. Lorsque la partie élastique est suffisamment faible, il est courant d'adopter une décomposition additive du tenseur taux des déformations :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.1)$$

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  sont les tenseurs taux de déformation, respectivement, élastique et plastique. Le tenseur taux des déformations total  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  correspond, dans l'hypothèse des petites déformations, à la partie symétrique du tenseur gradient du champ de vitesse  $\mathbf{V}$ , qui s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}(\mathbf{V}) + \mathbf{grad}(\mathbf{V})^T) \quad (2.2)$$

L'élasticité traduit une déformation réversible du matériau. Le plus souvent, elle est considérée comme linéaire et isotrope dans le cas des aciers à froid. Dans ces conditions, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est relié au tenseur taux de déformations élastiques par la loi de Hooke :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \lambda.trace(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)\mathbf{I} \quad (2.3)$$

Le tenseur identité,  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé déduits à partir des coefficients de Poisson  $\nu$  et du module d'Young  $E$  par les relations suivantes:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.4)$$

La plasticité fait référence à un état de déformation irréversible que le matériau est susceptible d'atteindre une fois qu'il a franchi un état de contrainte seuil. Cet état seuil est décrit par la surface de charge  $f$  :

$$f = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_u \quad ; \quad f \leq 0 \quad (2.5)$$

Dans cette expression, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est transformé en un scalaire représentatif  $\bar{\sigma}$ , appelé contrainte équivalente au sens du critère de plasticité. Cette contrainte est comparée à une deuxième contrainte  $\sigma_u$  dite contrainte d'écoulement du matériau et qui représente la contrainte seuil plastique. Lorsque la contrainte équivalente est inférieure à la contrainte d'écoulement (i.e  $f < 0$ ), la déformation est purement élastique. Inversement, dès que la contrainte équivalente est égale à la contrainte d'écoulement plastique (i.e  $f = 0$ ), le seuil est atteint et le matériau commence à se déformer plastiquement.

Pour un matériau écrouissable, la contrainte d'écoulement plastique évolue avec la déformation du matériau. On introduit alors la déformation plastique cumulée comme variable d'état interne permettant la description de l'état d'écrouissage. La contrainte d'écoulement devient alors :

$$\sigma_u = \sigma_u(\bar{\epsilon}^p) \quad (2.6)$$

La déformation plastique cumulée, ou déformation plastique équivalente, n'est autre que l'intégration au cours du temps de la vitesse de déformation plastique équivalente :

$$\bar{\epsilon}^p(t) = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}^p(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

La vitesse de déformation plastique équivalente est un scalaire représentatif du tenseur taux des déformations plastiques. Pour un critère de von Mises, la vitesse équivalente s'écrit :

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad (2.8)$$

Etant donné que la déformation plastique correspond à une transformation irréversible du matériau, les lois de la thermodynamique postulent l'existence d'un potentiel dissipatif  $g$  dont dérive une relation entre le tenseur taux de déformation plastique et le tenseur des contraintes :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \dot{\lambda} > 0 \quad (2.9)$$

On note que le tenseur taux de déformations plastiques est défini suivant la normale au convexe  $g$  avec une intensité définie par le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$ .

Jusqu'alors, on a postulé l'existence d'un potentiel plastique mais sans pour autant préciser sa forme.

Il est possible de choisir la surface de charge  $f$  comme étant le potentiel plastique dissipatif et d'en déduire la loi d'écoulement plastique, dite *associée*, et définie par :

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma, \bar{\epsilon}^p)}{\partial \sigma} \quad (2.10)$$

Dans le cas où le potentiel plastique  $g$  diffère de la fonction de charge, la loi d'écoulement définie par l'équation (2.9) est alors dite *non associée*.

Le potentiel plastique, en plasticité non associée, peut être choisi de la même forme mathématique que le critère de plasticité (fonction isotrope ou anisotrope, quadratique ou non). A titre d'exemple, [Khalfallah, 2004] considère une loi d'écoulement non associée avec un critère quadratique de Hill48 en contrainte plane et en anisotropie normale. La surface de charge est alors définie par :

$$f = \sqrt{\frac{r}{1+r}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \frac{1}{1+r}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) + 2\frac{1+2r}{1+r}\sigma_{12}^2} - \sigma_u \quad (2.11)$$

Le potentiel plastique est de la même forme défini par :

$$g = \sqrt{\frac{r'}{1+r'}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \frac{1}{1+r'}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) + 2\frac{1+2r'}{1+r'}\sigma_{12}^2} - \sigma_u \quad (2.12)$$

Le comportement du matériau est entièrement décrit par les deux coefficients  $r$  et  $r'$ . L'auteur identifie le paramètre  $r'$  au coefficient de Lankford, tandis que le paramètre  $r$  est identifié par analyse inverse d'un essai de traction plane.

## 2.2.2. Critères de plasticité

La surface de charge ( $f = 0$ ) délimite le domaine des déformations élastiques et le seuil d'écoulement plastique. La forme de cette surface est définie par le critère de plasticité (2.5). Le terme d'écrouissage dans cette même équation caractérise la taille de la surface au cours du chargement.

A l'état initial, et avant tout écrouissage, la surface de charge peut s'écrire :

$$f = \bar{\sigma}(\sigma) - \sigma_0 = 0 \quad (2.13)$$

où  $\sigma_0$  est la limite élastique du matériau en traction uni-axiale,  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente au sens du critère de plasticité.

Il existe une grande variété de critères de plasticité qui visent à modéliser le plus fidèlement possible le comportement des tôles. Ces derniers peuvent être répertoriés en deux familles: les critères isotropes, et les critères anisotropes.

### 2.2.2.1. Critère isotrope de von Mises

L'un des critères de plasticité isotrope les plus utilisés pour les matériaux métalliques ductiles est le critère de von Mises (1913). Il est établi en considérant l'écoulement plastique comme insensible à la pression hydrostatique, il est défini dans un repère de contrainte orthonormé quelconque par l'expression suivante :

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)]} \quad (2.14)$$

Transformé dans le repère des contraintes principales, le critère se ramène à la somme des carrés de la différence entre les contraintes principales.

La propriété d'isotropie doit traduire l'indépendance de l'expression du critère de plasticité de tout changement de repère, en d'autres termes le critère est objectif. Le critère de von Mises vérifie en particulier cette propriété, et il est donc possible de l'exprimer en fonction des invariants du tenseur des contraintes  $(J_1, J_2, J_3)$ , dont les expressions sont définies par :

$$J_1 = \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) \quad J_2 = \frac{1}{2}[\text{trace}(\boldsymbol{\sigma})^2 - \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}^2)] \quad J_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.15)$$

Le critère de von Mises s'écrit alors :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \quad (2.16)$$

Par ailleurs, étant donné l'invariance du critère à tout chargement sphérique de compression ou de traction, il est judicieux d'introduire le tenseur déviateur des contraintes  $\mathbf{s}$  :

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (2.17)$$

pour lequel le critère s'écrit:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \quad (2.18)$$

#### 2.2.2.2. Critères anisotropes

Le comportement de certains matériaux peut varier en fonction de la direction de sollicitation. Dans ces conditions, le matériau est dit anisotrope. L'orthotropie est une anisotropie particulière qui se caractérise par trois plans de symétries dont les intersections définissent les trois axes d'orthotropie  $(x, y, z)$ .

Le comportement des tôles laminées s'inscrit le plus souvent dans le cadre d'une anisotropie orthotrope pour laquelle le repère  $(x, y, z)$  s'identifie par :

- $x$  : la direction de laminage,
- $y$  : la direction perpendiculaire à la direction de laminage,
- $z$  : la direction normale au plan de la tôle.

On introduit, classiquement, le coefficient de Lankford  $r$  comme étant une mesure du rapport de la déformation plastique latérale  $\epsilon_{22}^p$  sur la déformation plastique en épaisseur  $\epsilon_{33}^p$  d'une éprouvette en traction uni-axiale :

$$r = \frac{\epsilon_{22}^p}{\epsilon_{33}^p} \quad (2.19)$$

En présence d'une anisotropie, ce coefficient varie en fonction de l'orientation de découpage de l'éprouvette de traction par rapport à la direction de laminage.

Dans la pratique, il est très commun d'identifier les coefficients de Lankford ( $r_0, r_{45}, r_{90}$ ) pour les trois orientations particulières définies à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage, et d'en déduire un coefficient d'anisotropie moyen  $\bar{r}$  :

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \quad (2.20)$$

et un écart  $\Delta r$  :

$$\Delta r = \frac{r_0 - 2r_{45} + r_{90}}{4} \quad (2.21)$$

Lorsque ( $\bar{r} \neq 1$  et  $\Delta r \neq 0$ ) on parle **d'anisotropie transverse**. Dans le cas particulier où ( $\bar{r} \neq 1$  et  $\Delta r = 0$ ), on parle alors **d'anisotropie normale** (ou orthotropie de révolution, ou encore isotropie plane) qui traduit une isotropie du comportement dans le plan de la tôle, et une anisotropie dans la direction de l'épaisseur ( $\bar{r} \neq 1$ ). Enfin, le cas isotrope est retrouvé pour ( $r_0 = r_{45} = r_{90} = 1$ ), autrement dit ( $\bar{r} = 1$  et  $\Delta r = 0$ ).

La variation de la limite élastique en fonction de l'orientation est une deuxième manifestation de l'anisotropie. Elle se traduit par une forme de la surface de charge variant avec la direction de sollicitation (Figure 2.1).

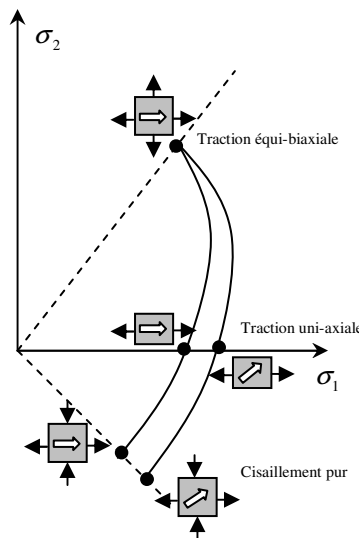


Figure 2.1 : Variation de la forme de la surface de charge en fonction de l'orientation par rapport à la direction de laminage.

⇒: Direction de laminage.

Par définition d'un comportement isotrope, l'expression du critère (i.e la forme de la surface de charge) doit être invariante par changement de repère. Cependant, il est bien manifeste sur la Figure 2.1 que cette condition n'est plus vérifiée pour des comportements anisotropes, il en découle une perte de l'objectivité du critère. De ce fait, un critère de plasticité anisotrope est nécessairement rattaché à un repère matériel de référence. Le plus souvent ce repère est choisi confondu avec le repère d'orthotropie ( $x, y, z$ ).



### a- Critère quadratique de Hill48

Hill [Hill, 1948] est le premier à avoir proposé un critère qui rend compte de l'anisotropie initiale des matériaux et plus particulièrement des matériaux métalliques. Le critère proposé est un critère quadratique qui s'exprime dans le repère d'orthotropie  $(x, y, z)$  par:

$$\bar{\sigma}^2 = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 \quad (2.22)$$

$\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente au sens du critère de Hill48, et  $(F, G, H, L, M$  et  $N)$  sont les paramètres de Hill qui déterminent la forme de la surface de charge et le degré de son anisotropie.

Sous l'hypothèse de contraintes planes, consistant à négliger toutes les composantes du tenseur des contraintes hors plan de la tôle ( $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ), le critère de Hill se réduit à l'expression suivante :

$$\bar{\sigma}^2 = (G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 \quad (2.23)$$

Le nombre de paramètres qui déterminent le critère est réduit à quatre  $(F, G, H$  et  $N)$ . A noter que ces paramètres doivent respecter certaines relations afin d'assurer la convexité de la surface de charge [Hill, 2000].

La détermination complète de la surface de charge en contraintes planes d'un matériau supposé obéir à un critère de Hill passe par l'identification de l'ensemble des paramètres de ce dernier. Pour pouvoir les identifier, on commence par exprimer la contrainte équivalente pour un essai de traction orienté d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction de laminage. Celle-ci peut être aisément obtenue en appliquant une matrice de rotation (d'axe  $z$  et d'angle  $\theta$ ) au tenseur des contraintes exprimé dans le repère de l'essai (correspondant à un tenseur de traction uni-axiale) pour le transformer dans le repère d'orthotropie. Le tenseur ainsi calculé est ensuite injecté dans l'expression (2.23) pour en déduire la contrainte équivalente dans la direction  $\theta$  :

$$\bar{\sigma}(\theta) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F \sin^4 \theta + G \cos^4 \theta + H(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 + 2N \sin^2 \theta \cos^2 \theta}} \quad (2.24)$$

Ensuite, moyennant la loi de la normalité (2.10), combinée avec l'expression précédente de la contrainte équivalente (2.23), le tenseur taux des déformations plastiques peut être déterminé dans le repère d'orthotropie pour ensuite être transformé dans le repère de l'essai. A partir de ce dernier tenseur, il est possible d'exprimer le coefficient de Lankford comme suit:

$$r(\theta) = \frac{d\epsilon_{22}^P}{d\epsilon_{33}^P} = \frac{H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{F \sin^2 \theta + G \cos^2 \theta} \quad (2.25)$$

Par ailleurs, les observables expérimentales dont dispose l'utilisateur sont généralement les trois limites élastiques  $(\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90})$  et les coefficients de Lankford  $(r_0, r_{45}, r_{90})$  mesurées respectivement à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  de la direction de laminage. En identifiant ces observables aux expressions analytiques des équations (2.24) et (2.25), le problème d'identification des paramètres de Hill consiste alors à trouver les 4 paramètres  $(F, G, H$  et  $N)$  vérifiant les 6 équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} r(0) = \frac{H}{G} = r_0 & (1) \\ r(45) = \frac{N}{F+G} - \frac{1}{2} = r_{45} & (2) \\ r(90) = \frac{H}{F} = r_{90} & (3) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\sigma}(0) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{G+H}} = \sigma_0 & (4) \\ \bar{\sigma}(45) = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{F+G+2N}} = \sigma_{45} & (5) \\ \bar{\sigma}(90) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+H}} = \sigma_{90} & (6) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Sachant que les 6 équations du système sont indépendantes, le problème est donc sur-contraint. Pour pouvoir le résoudre, il s'impose de choisir 4 équations au détriment de deux restantes qui ne seront à priori pas vérifiées. Parmi ces quatre équations, l'équation numéro (4) du système (2.26) s'impose systématiquement dès lors qu'on a déjà supposé que la loi d'écrouissage dans la direction de laminage correspond à loi d'écrouissage du matériau. Il en découle que  $G + H = 1$ .

Pour le choix des équations, plusieurs possibilités sont envisageables :

- comme premier choix, il est possible de considérer les équations (1),(2) et (3). La résolution de ces équations (en plus de l'équation (4)) conduit aux expressions suivantes des paramètres de Hill :

$$\begin{aligned} F &= \frac{r_0}{r_{90}(1+r_0)} & G &= \frac{1}{1+r_0} \\ H &= \frac{r_0}{1+r_0} & N &= \frac{(1+2r_{45})(r_0+r_{90})}{2r_{90}(1+r_0)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

- un autre choix consisterait à identifier les paramètres de Hill en se basant sur les limites élastiques et ce en utilisant les équations (5),(6). Cependant, comme il manque une quatrième équation, celle-ci peut être choisie parmi les équations (1),(2) et (3).

- une autre alternative peut être aussi envisagée, elle consiste à relaxer le problème d'identification des paramètres de Hill en transformant la résolution du problème (2.26) en un problème d'optimisation. Ainsi, [Priadi, 1993] définit une fonctionnelle qui décrit les écarts, au sens des moindres carrés, entre les limites élastiques et les coefficients de Lankford analytiques et expérimentaux. L'optimisation consiste à trouver le jeu des paramètres  $(F, G, H, N)$  qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$\phi(F, G, H, N) = \eta \left[ \frac{(\bar{\sigma}(0) - \sigma_0)^2 + (\bar{\sigma}(45) - \sigma_{45})^2 + (\bar{\sigma}(90) - \sigma_{90})^2}{\frac{\sigma_0 + \sigma_{45} + \sigma_{90}}{3}} \right] + (1-\eta)[(r(0) - r_0)^2 + (r(45) - r_{45})^2 + (r(90) - r_{90})^2] \quad (2.28)$$

Dans cette expression les contraintes sont normalisées pour être du même ordre de grandeur que les coefficients de Lankford. Le coefficient de pondération  $\eta$  permet de donner un poids préférentiel à l'une ou à l'autre des deux observables (limite élastique ou coefficient de Lankford).

- à noter aussi, que si on dispose de mesures expérimentales des limites élastiques d'essais autres que les essais de tractions (traction équi-biaxiale, traction plane, cisaillement..), il est aussi possible

d'exploiter ces données pour l'identification des paramètres de Hill. Par exemple, si  $\sigma_b$  correspond à la limite élastique en traction équi-biaxiale, les paramètres de Hill seront donnés par:

$$\begin{aligned} 2F &= \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_{90}^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} & 2G &= \frac{1}{\sigma_{90}^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} \\ 2H &= \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_{90}^2} - \frac{1}{\sigma_b^2} & 2N &= \frac{4}{\sigma_{45}^2} - \frac{1}{\sigma_b^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Il ressort de ces différentes techniques d'identification des paramètres que le critère de Hill n'est pas en mesure de décrire avec précision à la fois les coefficients de Lankford et les limites élastiques du matériau. Selon la technique choisie, l'une ou l'autre des propriétés d'anisotropie sera donc privilégiée et identifiée avec précision au détriment de la deuxième. La méthode d'optimisation de [Priadi, 1993] vise à pondérer cette tendance en répartissant l'erreur d'identification entre les limites élastiques et les coefficients de Lankford mais elle pose le problème du choix du coefficient  $\eta$ .

Généralement, l'anisotropie des aciers se manifeste plus à travers le coefficient de Lankford que la limite élastique, c'est probablement la raison pour laquelle, souvent, dans la littérature les coefficients de Hill sont identifiés en se basant sur les coefficients de Lankford. Dans ces conditions, la contrainte équivalente du critère de Hill en contraintes planes s'écrit en combinant (2.23) et (2.27):

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_{xx}^2 - \frac{2r_0}{1+r_0} \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \frac{r_0(1+r_{90})}{r_{90}(1+r_0)} \sigma_{yy}^2 + \frac{(1+2r_{45})(r_0+r_{90})}{r_{90}(1+r_0)} \sigma_{xy}^2 \quad (2.30)$$

#### Le comportement « anormal » de l'aluminium

Considérons à présent le cas d'anisotropie normale ( $r_0 = r_{45} = r_{90} = \bar{r}$ ), avec un chargement équi-biaxial ( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_b \neq 0$ ;  $\sigma_{xy} = 0$ ). Le critère de Hill48 tel qu'il est exprimé par la relation (2.30) prévoit la relation suivante entre la limite élastique uni- et équi-biaxiale:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{1+\bar{r}}} \sigma_b = \sigma_0 \quad (2.31)$$

Si on considère le cas des tôles en alliages d'aluminium, qui présentent souvent un coefficient de Lankford  $\bar{r} < 1$ , le modèle de Hill (2.31) prévoit que ( $\sigma_b/\sigma_0 < 1$ ). Cependant, les observations expérimentales de Woodthorpe et Pearce [Woodthorpe, 1970] ont montré que le comportement d'un aluminium, et à l'inverse des prédictions du modèle de Hill, est caractérisé par une limite élastique plus grande en traction équi-biaxiale qu'en traction uni-axiale (i.e  $\sigma_b/\sigma_0 > 1$ ). Ce comportement est bien connu sous le nom du comportement « anormal » de l'aluminium. Pour en tenir compte, d'autres types de critères dits critères non quadratiques ont ainsi vu le jour.

#### ***b-Critère non quadratique de Hill (1979)***

Afin d'accommoder le comportement « anormal » de l'aluminium, Hill [Hill, 1979] a proposé un deuxième critère, cette fois-ci non quadratique. Ce critère n'est valable que dans le cas où les

directions principales du tenseur des contraintes coïncident avec les directions d'orthotropie du matériau. Dans ce cas, le critère s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma}^m = f|\sigma_2 - \sigma_3|^m + g|\sigma_3 - \sigma_1|^m + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m + a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m \quad (2.32)$$

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sont les contraintes principales,  $(a, b, c, f, g, h)$  correspondent aux paramètres du critère, et sont identifiables à partir des limites élastiques et des coefficients de Lankford. Le coefficient  $m$  est aussi un paramètre du modèle dont l'identification nécessite de disposer d'un essai combiné (traction équi-biaxiale ou autres..).

Pour un état d'anisotropie normale (défini par un coefficient  $\bar{r}$ ), [Lian et al, 1987] ont démontré que la condition de convexité du critère est assurée pour  $(m > 1)$ . Le critère est dans ces conditions exprimé comme suit :

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^m + (1 + 2\bar{r})|\sigma_1 - \sigma_2|^m = 2(1 + \bar{r})\bar{\sigma}^m \quad (2.33)$$

Le coefficient  $m$  peut être déduit selon :

$$m = \frac{\ln(2(1 + \bar{r}))}{\ln(2/\alpha_b)} \quad (2.34)$$

où  $\alpha_b$  correspond au rapport expérimental des contraintes :

$$\alpha_b = \sigma_0 / \sigma_b \quad (2.35)$$

### ***c- Critère non quadratique de Hosford (1979)***

Le critère de Hosford [Hosford, 1979] repose sur une approximation polynomiale de la surface de charge des modèles cristallographiques et s'écrit sous la forme suivante :

$$(1 + r_0)\bar{\sigma}^a = r_0|\sigma_2|^a + r_{90}|\sigma_1|^a + r_0r_{90}|\sigma_1 - \sigma_2|^a \quad (2.36)$$

Les auteurs préconisent une valeur de l'exposant  $a$  égale à 6 pour les structures cristallographiques cubiques centrées, et une valeur de 8 pour les structures cubiques à faces centrées.

Pour une anisotropie normale, le critère s'écrit :

$$(1 + \bar{r})\bar{\sigma}^a = |\sigma_1|^a + |\sigma_2|^a + \bar{r}|\sigma_1 - \sigma_2|^a \quad (2.37)$$

### ***Remarque***

Il est à noter que bien d'autres critères non quadratiques sont disponibles dans la littérature. Ce domaine d'étude est tout particulièrement riche de modèles et continue d'être ouvert à de nouvelles contributions [Barlat, 2003]. Les modèles proposés se caractérisent par un nombre de paramètres de plus en plus important ce qui leur confère une plus grande flexibilité pour ajuster à la fois les coefficients de Lankford et les limites élastiques et nécessite en même temps une base de données expérimentale importante.

### 2.2.3. Analyse géométrique des critères de plasticité

On a vu que l'étude du comportement plastique nécessite la définition d'une surface de charge, d'une loi d'écoulement (loi de la normalité) et d'une loi d'écrouissage. S'il est bien établi que ces trois fondements ont été introduits sur la base d'observations expérimentales et d'approche thermodynamique [Mandel, 1971], l'étude de la plasticité anisotrope peut, néanmoins, être abordée par une autre approche purement géométrique.

Ainsi, Hill [Hill, 2000] a récemment proposé une théorie générale permettant de mieux comprendre la plasticité anisotrope. L'approche repose sur une étude *géométrique* de la théorie de l'écoulement plastique anisotrope. Pour ce faire, on considère les entités suivantes :

- § On définit par  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy décrit dans un référentiel orthonormé quelconque. A noter que le tenseur est symétrique dès lors que les moments sont négligés.
- § La surface de charge, introduite au § 1.2 de ce chapitre, sera réécrite sous la forme suivante:

$$\Phi(\sigma) = 1 \quad (2.38)$$

Par rapport à l'équation (2.13), cette expression peut être interprétée comme une représentation de la surface de charge du matériau dans l'espace des contraintes normalisées par la limite élastique. Ceci permet de s'affranchir de l'écrouissage, et de considérer que la taille de la surface de charge n'évolue pas.

Pour décrire une surface de charge, la fonction  $\Phi$  doit vérifier quelques propriétés :

1. La surface est supposée lisse, ce qui veut dire que la fonction  $\Phi$  est dérivable.
  2. La fonction  $\Phi$  contient l'origine.
  3. La fonction  $\Phi$  doit être strictement convexe<sup>1</sup> afin d'assurer une relation univoque entre le tenseur des contraintes et le tenseur taux de déformations. La convexité assure aussi la convergence numérique lorsqu'un critère de plasticité, décrit par la fonction  $\Phi$ , est implémenté dans un code EF.
  4. La fonction  $\Phi$  est positivement homogène<sup>2</sup> de degré 1.
- § On définit par  $\tilde{N}$  le tenseur de la normale extérieure locale en tout point de la surface de charge. Ce tenseur est par construction symétrique, ce qui permet d'assurer un produit contracté  $\tilde{N}$  par  $\sigma$  positif correspondant à un incrément de travail plastique positif. Par définition, la normale est donnée par :

$$\tilde{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (2.39)$$

- § Etant donnée que  $\Phi$  est homogène de degré 1, elle satisfait alors le théorème d'Euler :

<sup>1</sup> Une fonction  $\Phi$  est convexe, si et seulement si, sa matrice Hessienne ( $H = \partial^2 \Phi / \partial \sigma^2$ ) est définie positive.

<sup>2</sup> Une fonction  $\Phi(\sigma)$  est homogène de degré  $m$  si :  $\forall \sigma$  et  $\forall k \in \mathbb{R}^+ \quad \Phi(k \cdot \sigma) = k^m \cdot \Phi(\sigma)$ .

$$\boldsymbol{\sigma} : \tilde{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Phi \quad (2.40)$$

Dans ce qui précède, la surface de charge  $\Phi$  a été définie dans l'espace orthonormé des contraintes de Cauchy. C'est l'espace d'étude le plus immédiat. Toutefois, il est possible d'introduire d'autres espaces de représentation dans lesquelles l'étude des surfaces de charge anisotropes, et tout particulièrement orthotropes, est plus commode.

### 2.2.3.1. Espaces de représentation des critères de plasticité

#### **a- Espace cartésien des contraintes de Cauchy**

Pour les critères orthotropes auxquels nous nous intéressons, le tenseur des contraintes de Cauchy est défini dans le repère d'orthotropie. Sous l'hypothèse des contraintes planes, l'espace de représentation se réduit à l'espace cartésien 3D  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  pour lequel l'équation de la surface de charge s'écrit :

$$\Phi(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) = 1 \quad (2.41)$$

En vertu de la symétrie orthotrope, cette surface présente une symétrie par rapport à l'hyperplan d'équation  $(\sigma_{xy} = 0)$  [Pijlman, 2001].

#### **b- Espace euclidien des contraintes**

La surface de charge peut être représentée dans un autre espace euclidien  $(X, Y, Z)$ , où la représentation vectorielle du tenseur des contraintes est définie par :

$$X = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{\sqrt{2}}, \quad Z = \sqrt{2}\sigma_{xy} \quad (2.42)$$

Ce changement de variable conduit à une nouvelle expression du critère de plasticité définie par la fonction suivante :

$$\Theta(X, Y, Z) = 1 \quad (2.43)$$

#### **c- Espace des contraintes principales**

Etant donnée la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy, ce dernier peut être diagonalisé pour définir les deux contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$  et l'angle  $\theta$  que forme le repère principal des contraintes avec le repère d'orthotropie. L'ensemble des trois nouvelles variables  $(\sigma_1, \sigma_2, \theta)$  définissent les variables intrinsèques du matériau pour lesquels la surface de charge s'écrit :

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \theta) = 1 \quad (2.44)$$

Le passage entre l'espace des contraintes et l'espace des contraintes principales est possible grâce au changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \\
 \sigma_2 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \\
 \cos 2\theta &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} / \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Cette nouvelle transformation permet de simplifier la représentation de la surface de charge, qui initialement était 3D dans l'espace cartésien  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ , en une représentation 2D dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2)$ . Toutefois, c'est une famille de courbes qui sera représentée puisque à chaque valeur de l'angle  $\theta$  correspondra une courbe de charge.

Dans le cas isotrope, les variables intrinsèques du matériau se réduisent aux seules contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$  et l'angle  $\theta$  étant nul, la famille des courbes se réduit à une seule courbe.

Nous traçons sur la Figure 2.2 la surface de charge du critère de von Mises dans les trois espaces de contraintes qu'on vient de présenter. On retrouve sur les Figure 2.2-a,c la forme elliptique habituelle du critère. Dans l'espace  $(X, Y, Z)$ , le tracé ellipsoïdal de la surface de charge est transformé en une surface sphérique plus « représentative » d'un état isotrope.

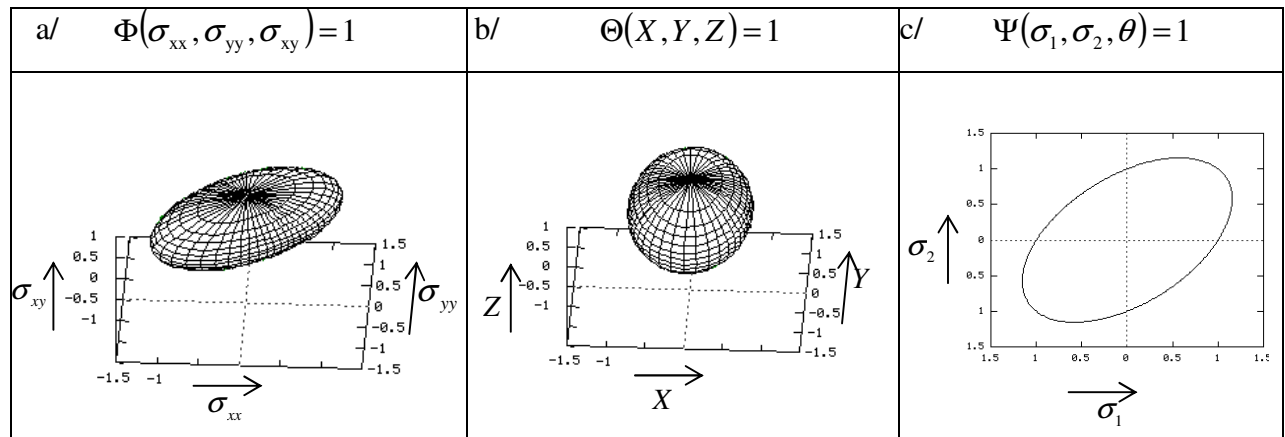


Figure 2.2 : Représentation du critère de von Mises dans les différents espaces de contraintes.

### Remarque

Il est à noter que si la surface de charge  $\Phi$  est homogène et convexe dans l'espace des contraintes de Cauchy  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ , alors les fonctions  $\Theta$  et  $\Psi$  le sont aussi dans leurs espaces respectifs  $(X, Y, Z)$  et  $(\sigma_1, \sigma_2)$  [Barlat, 2004].

### 2.2.3.2. Condition de coaxialité entre le tenseur des contraintes et le tenseur taux des déformations

Considérons un point situé sur la surface de charge définie dans l'un des espaces des contraintes précédemment présentés. A ce point correspondront un rayon vecteur et une normale locale. En

plasticité associée, ces deux entités géométriques correspondent au tenseur des contraintes  $\sigma$  et au tenseur  $\tilde{N}$  (i.e au tenseur taux des déformations plastiques). Lorsque la surface de charge est isotrope, il est possible de démontrer que les deux tenseurs  $\sigma$  et  $\tilde{N}$  sont coaxiaux<sup>3</sup> en tout point de la surface. Dès lors que le critère, et donc la surface associée, est anisotrope, la condition de coaxialité n'est plus vérifiée.

En ayant au préalable introduit les différentes fonctions  $\Phi$ ,  $\Theta$  et  $\Psi$  utiles pour la description des surfaces de charge, Hill [Hill, 2000] démontre que les points d'une surface de charge anisotrope pour lesquels la condition de coaxialité entre le rayon vecteur et le vecteur normal reste vérifiée, sont les points satisfaisant les relations suivantes:

$$X \frac{\partial \Theta(X, Y, Z)}{\partial Z} - Z \frac{\partial \Theta(X, Y, Z)}{\partial X} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \psi(\sigma_1, \sigma_2, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.46)$$

Pour tous les autres points, le repère principal du tenseur  $\tilde{N}$  (i.e le repère principal des taux de déformations plastiques) se situe à un angle  $\beta$  par rapport au repère principal du tenseur des contraintes. L'auteur décline les deux relations suivantes pour calculer cet angle :

$$\tan 2(\theta + \beta) = \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial Z}}{\frac{\partial \Theta}{\partial X}} \quad \text{ou} \quad \tan 2\beta = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}}{(\sigma_1 - \sigma_2) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_2} \right)} \quad (2.47)$$

Rappelons que l'angle  $\theta$  est l'angle que fait le repère principal des contraintes par rapport au repère d'orthotropie.

Nous illustrons sur la Figure 2.3 l'ensemble de ces repères ainsi que leurs orientations relatives par rapport au repère d'orthotropie  $(x, y)$  pour un état de contraintes planes.

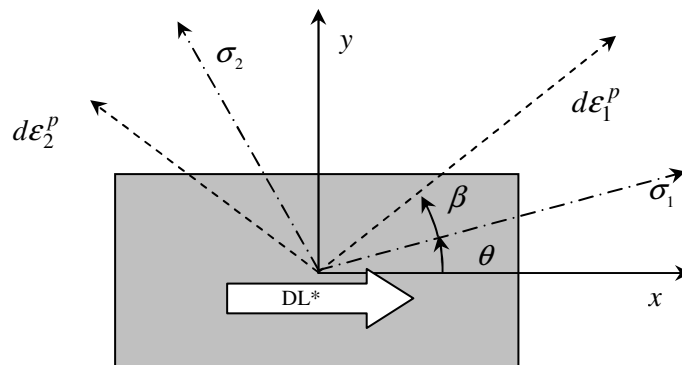


Figure 2.3 : Orientation des repères principaux de contrainte et d'incrément de déformation plastique, par rapport à la direction de laminage pour un état de contraintes planes.

\*DL : direction de laminage.

<sup>3</sup> Deux tenseurs d'ordre 2 sont coaxiaux, si et seulement si, les vecteurs de leurs bases principales sont deux à deux colinéaires.



Considérons à présent le critère quadratique de Hill48 en contraintes planes. Il s'exprime dans l'espace des contraintes  $(X, Y, Z)$  par la relation suivante:

$$\Theta(X, Y, Z) = \frac{1}{2}(F + G + H)X^2 - (F - G)XY + \frac{1}{2}(F + G)Y^2 + NZ^2 = 1 \quad (2.48)$$

En appliquant la condition de coaxialité (2.46) à ce critère, on aboutit aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} Z = 0 & (1) \\ \text{ou} \\ (A + B)X - (A - B)Y = 0 & (2) \end{cases} \quad (2.49)$$

où les paramètres  $A$  et  $B$  correspondent à :

$$A = F + 2H - N \quad ; \quad B = G + 2H - N \quad (2.50)$$

Les équations (1),(2) du système (2.49) représentent deux hyperplans dont l'intersection avec la surface de charge  $\Theta$  définit les deux seules courbes sur lesquelles la condition de coaxialité est vérifiée.

### Conséquences

Il est intéressant de souligner les points suivants découlant des relations (2.49) :

- L'équation (1) de coaxialité correspond au cas de chargement suivant les axes du matériau (i.e  $\sigma_{xy} = 0$ ). Dans ces conditions, aussi bien le tenseur des contraintes que le tenseur taux des déformations plastiques sont diagonaux dans le repère d'orthotropie.
- En revanche, pour les chargements hors axes, la base principale du tenseur taux des déformations plastiques est orientée d'un angle  $\beta$  (2.47) par rapport à la base principale du tenseur des contraintes. Par conséquent, si on se place dans le repère des contraintes que l'on suppose diagonal, le tenseur taux des déformations plastiques ne l'est pas dans ce même repère.

A titre d'exemple, prenons le cas d'un essai de traction hors axes. Dans le repère de l'essai, noté par  $(1,2,3)$ , le tenseur des contraintes est diagonal. Cependant, comme le repère des déformations principales ne correspond pas au repère principal des contraintes, il s'en suit que les déformations plastiques ne sont pas diagonales dans le repère  $(1,2,3)$ . Les deux tenseurs peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1,2,3)} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^p & \varepsilon_{12}^p & 0 \\ \varepsilon_{12}^p & \varepsilon_{22}^p & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^p \end{pmatrix}_{(1,2,3)} \quad (2.51)$$

L'amplitude du terme de cisaillement  $\varepsilon_{12}$  dépendra du degré d'anisotropie du matériau, de l'orientation des axes du matériau et du niveau des déformations. Reste qu'en traction, le cisaillement est de second ordre devant les déformations élongationnelles.

## 2.2.4. Ecouissage et effet de la vitesse de déformation

### 2.2.4.1. Loi d'écrouissage

Jusqu'ici on s'est intéressé uniquement à la forme des surfaces de charge au travers des critères de plasticité. Toutefois, tout au long du chargement, ces surfaces changent de taille: c'est l'écrouissage plastique. Lorsque la forme de la surface est gardée inchangée et que seule sa taille évolue, l'écrouissage est dit isotrope et est décrit par une courbe d'écrouissage.

L'essai de traction suivant la direction de laminage est souvent choisi comme essai de référence pour établir la courbe d'écrouissage reliant l'évolution de la limite élastique (i.e  $\sigma_0$ ) à la variable interne d'écrouissage (i.e la déformation équivalente plastique  $\bar{\epsilon}$ ). On approche ces courbes par des fonctions analytiques qui peuvent prendre plusieurs formes<sup>4</sup> :

- Loi d'écrouissage de Hollomon  $\bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$
- Loi d'écrouissage de Krupkowski  $\bar{\sigma} = K(\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n$
- Loi d'écrouissage de Ludwik  $\bar{\sigma} = \sigma_i + K\bar{\epsilon}^n$
- Loi d'écrouissage de Voce  $\bar{\sigma} = \sigma_i + \sigma_s \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0}\right) \right]$

(2.52)

Bien que la première loi Hollomon ait l'avantage d'être la plus simple, elle présente toutefois une certaine limitation dans la description de la courbe d'écrouissage pour les faibles déformations. L'introduction d'une déformation seuil ( $\epsilon_0$  dans la loi Krupkowski) ou bien d'une contrainte seuil ( $\sigma_i$  dans la loi de Ludwik), permet de s'affranchir de la limitation de la loi de Hollomon et offre une meilleure description sur toute la plage des déformations. En ce qui concerne la quatrième loi de Voce, elle est le plus souvent adaptée pour la description de l'aluminium.

### 2.2.4.2. Effet de la vitesse de déformation

La sensibilité à la vitesse de déformation, phénomène plus particulièrement marqué pour les procédés de mise en forme à chaud, est néanmoins présent pour des procédés de mise en forme à froid. Dans la pratique cet effet se manifeste par une variation de la courbe de traction en fonction de la vitesse de l'essai. Bien que cette variation soit très peu significative (comparée à des matériaux purement viscoplastique), la sensibilité à la vitesse est connue pour jouer un rôle majeur dans la stabilité des écoulements plastiques et dans la formation de la striction. Ce problème sera abordé au troisième chapitre, et on s'intéressera ici à la modélisation et l'identification des paramètres de la sensibilité à la vitesse à partir d'essais de traction.

#### a. Approche additive

Proposée par [Conrad, 1961] et [Mitra, 1963], cette approche repose sur l'additivité du terme lié à la sensibilité à la vitesse de déformation avec le terme d'écrouissage, soit :

$$\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}) + \Delta\bar{\sigma}(\dot{\bar{\epsilon}}) \quad (2.53)$$

<sup>4</sup> Dans ces expressions, nous avons substitué la limite élastique  $\sigma_0$  par la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  (puisque  $f = \bar{\sigma} - \sigma_0 = 0$ ). Ceci permet une écriture plus générale des lois d'écrouissage.

où l'incrément d'érouissage dû à la vitesse de déformation effective  $\dot{\bar{\epsilon}}$  est défini par :

$$\Delta\bar{\sigma}(\dot{\bar{\epsilon}}) = k \cdot \ln\left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0}\right) \quad (2.54)$$

$\dot{\bar{\epsilon}}_0$  étant une vitesse de déformation de référence et  $k$  le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation. Ce dernier peut être identifié par un test de traction au cours duquel la vitesse de traverse est augmentée brusquement pour passer d'une première vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_1$  à une deuxième vitesse  $\dot{\epsilon}_2$ , appelé « jump test » (Figure 2.4). A partir de l'accroissement de l'effort de traction  $\Delta\bar{\sigma}$ , le paramètre  $k$  peut être calculé selon [Ghosh, 1974] :

$$k = \frac{\Delta\bar{\sigma}}{\ln(\dot{\bar{\epsilon}}_1/\dot{\bar{\epsilon}}_2)} \quad (2.55)$$

L'additivité du terme lié à la sensibilité à la vitesse de déformation peut aussi prendre une autre forme [Aliaga, 2000] :

$$\bar{\sigma} = K(\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n + K' \dot{\bar{\epsilon}}^m \quad (2.56)$$

où  $K, n, \epsilon_0$  sont des constantes d'érouissage et  $K', m$  sont des constantes relatives à l'effet de la vitesse de déformation.

### ***b. Approche « paramétrée »***

Etant donnée la dépendance observée des courbes d'érouissage en fonction de la vitesse de déformation, l'idée proposée par [Priadi, 1993] est de conserver les mêmes fonctions d'érouissage (cf. §2.2.4.1), et d'intégrer l'effet de la vitesse en paramétrant les coefficients de ces lois. A titre d'exemple, une loi d'érouissage de Krupkowski s'écrit :

$$\bar{\sigma} = K(\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n \quad (2.57)$$

avec

$$K = K_{ref} \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{ref}} \right)^a \quad \epsilon_0 = \epsilon_{0ref} \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{ref}} \right)^b \quad n = n_{ref} \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{ref}} \right)^c \quad (2.58)$$

où  $a, b, c$  sont des constantes du matériau.  $K_{ref}, \epsilon_{0ref}, n_{ref}$  sont les paramètres de référence identifiés à la vitesse de référence  $\dot{\epsilon}_{ref}$ .

### ***c. Approche multiplicative***

Une bonne approximation de la loi de comportement du matériau est donnée par :

$$\bar{\sigma} = K(\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n \dot{\bar{\epsilon}}^m \quad (2.59)$$

où  $K$  est la consistance du matériau,  $n$  le coefficient d'érouissage,  $\epsilon_0$  la déformation seuil d'écoulement et  $m$  le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. Ce dernier peut varier de

l'ordre de  $10^{-3}$  à température ambiante jusqu'à 0,6 pour des matériaux superplastiques présentant une grande sensibilité à la vitesse de déformation.

Pour déterminer la valeur de  $m$ , on peut effectuer des essais de traction à différentes vitesses de déformations constantes. On trace ensuite, pour une déformation équivalente donnée, la courbe d'évolution de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  en fonction de la vitesse de déformation équivalente  $\dot{\bar{\epsilon}}$ . La pente de la courbe ainsi trouvée permet d'identifier le coefficient de sensibilité à la vitesse :

$$m = \left. \frac{\partial \ln \bar{\sigma}}{\partial \ln \dot{\bar{\epsilon}}} \right|_{\bar{\epsilon}} \quad (2.60)$$

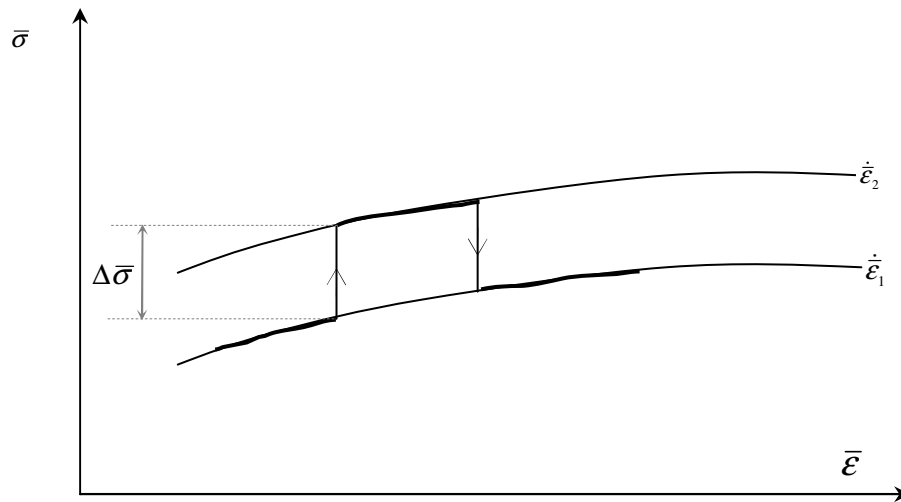


Figure 2.4: Essai de traction : Jump test .

#### d. Synthèse

La première approche additive rend bien compte de l'incrément d'écrouissage supplémentaire que subit le matériau au cours d'un accroissement de sa vitesse de déformation. Elle est donc assez cohérente avec l'approche *incrémentale* classique pour la modélisation de la plasticité. Concernant la troisième approche, et même si cette approche traduit uniquement la dépendance de la courbe d'écrouissage *continue* à la vitesse de déformation et ne prend pas en compte l'écrouissage incrémental, cette approximation s'avère être suffisante pour la description du comportement des tôles à froid [Semiati, 1983], elle est largement utilisée dans la littérature. C'est cette approche qui sera adoptée pour la suite des développements. La deuxième approche présentée se trouve être capable de décrire le comportement d'un matériau sur une plage de vitesses de déformation donnée. Cependant, elle reste encore d'une utilisation très limitée de part sa formulation qui fait apparaître un couplage entre l'écrouissage et la vitesse de déformation.

## 2.3. Caractérisation expérimentale

### 2.3.1. Essais de traction

L'essai de traction est très riche en informations sur le comportement d'une tôle. Grâce à sa relative simplicité de mise en œuvre, sa facilité de dépouillement et sa fiabilité, ce test reste le premier outil

pour la caractérisation des tôles. Il permet ainsi, l'identification des propriétés du matériau en termes de limites élastiques, coefficient de Lankford, courbe d'écrouissage et sensibilité à la vitesse de déformation.

Les essais de tractions menés dans le cadre de ce travail, ont été effectués par le laboratoire Danois (RISOE). La mesure des déformations a été faite localement grâce à un système de corrélation d'images donnant accès à la fois à la déformation longitudinale (utilisée pour le calcul de la courbe d'écrouissage) et à la déformation transversale (utilisée pour le calcul du coefficient de Lankford).

Trois nuances d'acier ainsi qu'un alliage d'aluminium ont été utilisés pour cette étude :

- § la première est un acier doux DC04,
- § la deuxième est un acier biphasé DP450 (Dual phase),
- § la troisième un acier TRIP (TRANSFORMATION INDUCED PLASTICITY),
- § un aluminium série 5xxx (5754).

Les caractéristiques d'écrouissage et d'anisotropie de ces matériaux sont reportées dans les Tableaux 2-1 et 2-2. Les paramètres  $\gamma$  figurant ont été identifiés à partir d'essais de traction à vitesse de traverse constante de  $10^{-3} \text{ mm/s}$ .

**Tableau 2-1:** Paramètres de la loi d'écrouissage de Krupkowski pour les différents matériaux.

	<i>Epaisseur [mm]</i>	<i>K[MPa]</i>	<i>n</i>	<i><math>\epsilon_0</math></i>
<b>DC04</b>	1.0	527	0.262	0.0067
<b>DP450</b>	1.4	804	0.193	0.0055
<b>TRIP800</b>	1.0	1471	0.2597	0.0164
<b>5754</b>	1.0	453	0.31	0.003

**Tableau 2-2 :** Paramètres d'anisotropie : coefficients de Lankford et limites élastiques mesurés à 0°, 45° et 90° de la direction de laminage.

	<i>Coefficients de Lankford (à 10%)</i>			<i>Limites élastiques [MPa]</i>		
	<i><math>r_0</math></i>	<i><math>r_{45}</math></i>	<i><math>r_{90}</math></i>	<i><math>\sigma_0</math></i>	<i><math>\sigma_{45}</math></i>	<i><math>\sigma_{90}</math></i>
<b>DC04</b>	1.872	1.333	2.617	155.9	158.1	155.5
<b>DP450</b>	1.076	0.78	1.48	305.1	335.7	326.7
<b>TRIP800</b>	1.0143	0.861	1.106	522	545	539
<b>5754</b>	0.804	0.7	0.61			

Afin de visualiser l'anisotropie et de distinguer la différence de comportement plastique entre les trois nuances d'acier, sur la Figure 2.5 sont reportées les surfaces de charge présentées dans l'espace cartésien des contraintes. La grande variabilité du coefficient de Lankford du DC04 en fonction de l'orientation, se traduit par une forme de la surface de charge la plus ovalisée. En outre, on note la variation de la forme de la surface de charge en fonction de l'orientation. Pour les deux autres matériaux, il existe une influence de l'orientation sur la forme de la surface de charge mais elle reste moins prononcée que pour le DC04.

Malgré leur différence en terme d'anisotropie, les trois matériaux présentent une même propriété ; au voisinage de l'état équi-biaxiale ( $X = 0 ; Y > 0$ ), la forme de la surface de charge est beaucoup moins sensible à l'orientation qu'au voisinage d'un chargement en cisaillement ( $X > 0 ; Y = 0$ ). Entre les deux états, la variation est progressive. Ceci laisse donc à penser que, pour identifier l'anisotropie comportementale d'un matériau (en terme de limite élastique), il serait plus judicieux d'utiliser des tests en retreint qu'en expansion.

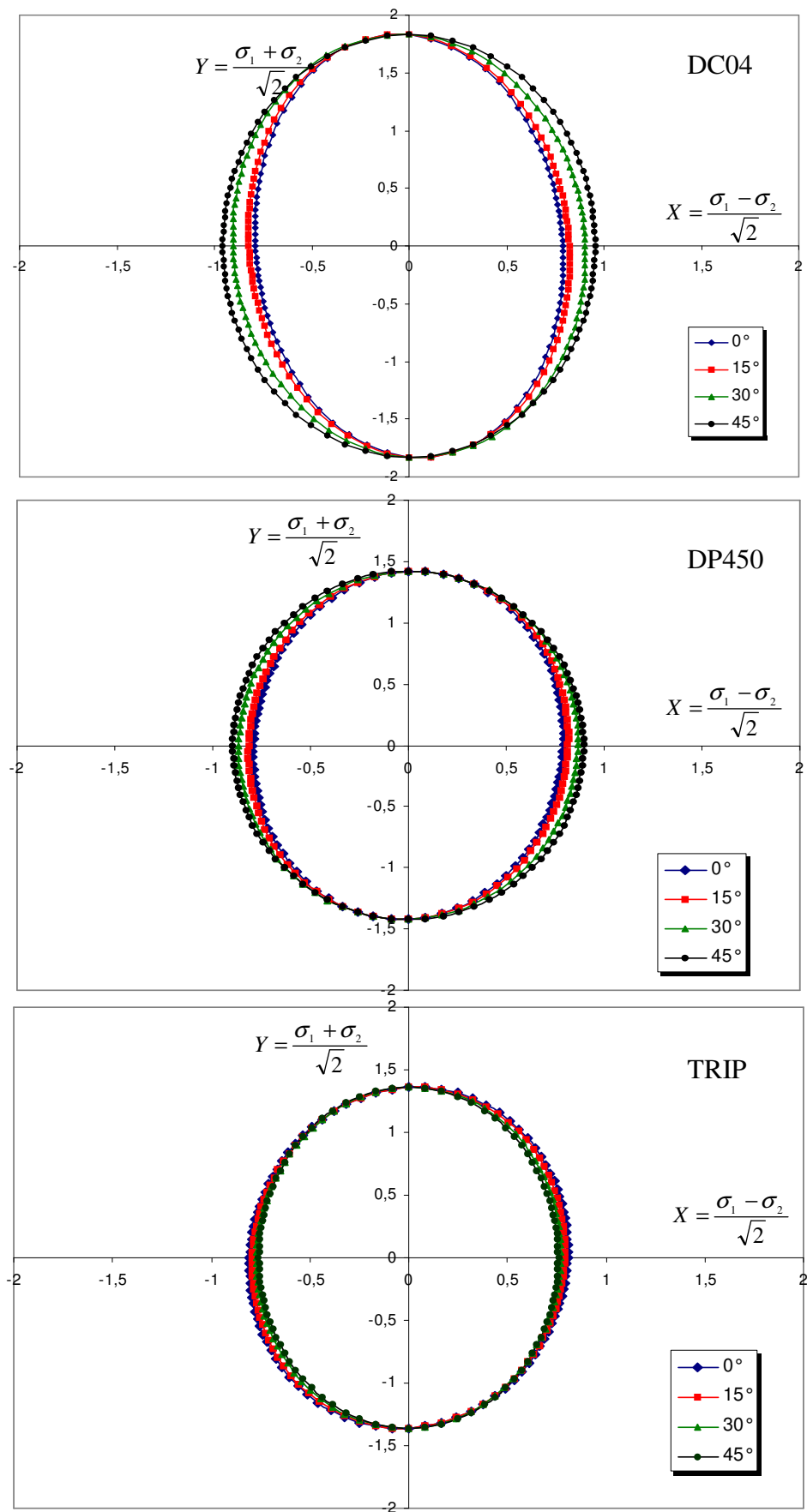


Figure 2.5: Surface de charge dans l'espace cartésien des contraintes.

## 2.3.2. Essai de cisaillement

### 2.3.2.1. Généralité

L'essai de cisaillement simple présente l'avantage de fournir une courbe d'écrouissage couvrant une large plage de déformations avant qu'une instabilité plastique n'apparaisse. De part les grandes déformations, et les grandes rotations que subit le matériau au cours du cisaillement, cet essai a fait l'objet de plusieurs études dont les finalités couvrent un large spectre d'objectifs : l'identification des courbes d'écrouissage en grandes déformations [Miyauchi, 1984], [Genevois, 1992], [Hora, 2000], [Pijlman, 2001], [Sigvant, 2003], [Blazy, 2003], l'étude de l'effet Bauschinger grâce à la possibilité de chargement cyclique qu'offre cet essai [Vreede, 1992] ou bien l'évaluation de l'effet du cisaillement sur l'évolution de l'anisotropie initiale et induite [Bacroix, 1994], [Rauch, 1998].

Au CEMEF, une première expérience a été menée par Knockaert [Knockaert, 2001] afin de mettre en place un essai de cisaillement. Le choix s'est alors porté sur l'essai de cisaillement de type Miyauchi qui présente l'avantage d'éliminer les effets de frottement pouvant apparaître lors d'autres types d'essais de cisaillement simple (l'essai Rauch [Rauch, 1989] par exemple).

Après conception et fabrication d'une première éprouvette, les premiers essais ont révélé la présence d'instabilités se manifestant par une tendance de l'éprouvette à flamber hors du plan de cisaillement. Les tentatives à astreindre l'éprouvette à se déformer dans son plan, moyennant le blocage mécanique de tout déplacement hors plan, n'ont pas permis de résoudre le problème. C'est au vu de ces constatations qu'une nouvelle éprouvette a été dessinée en veillant à ce que le rapport entre la largeur de la zone utile et l'épaisseur de la tôle soit suffisamment faible pour réduire les tendances au flambage<sup>5</sup> [Miyauchi, 1984].

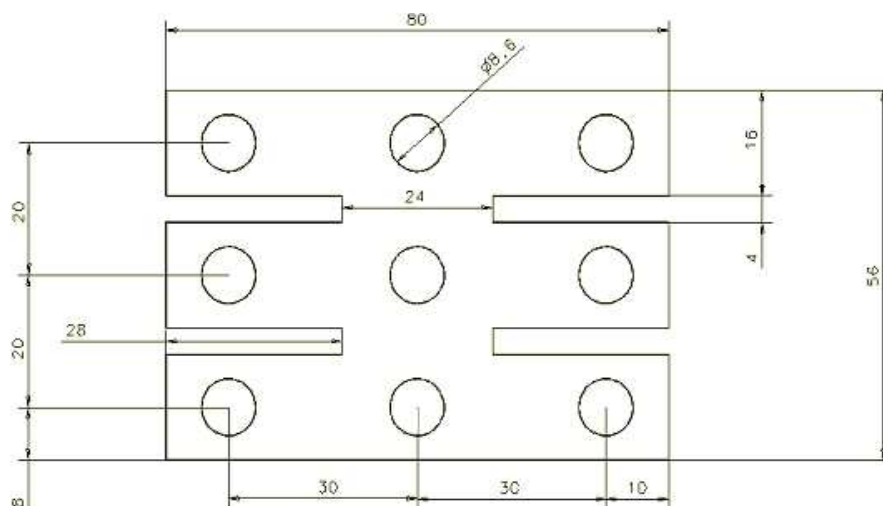
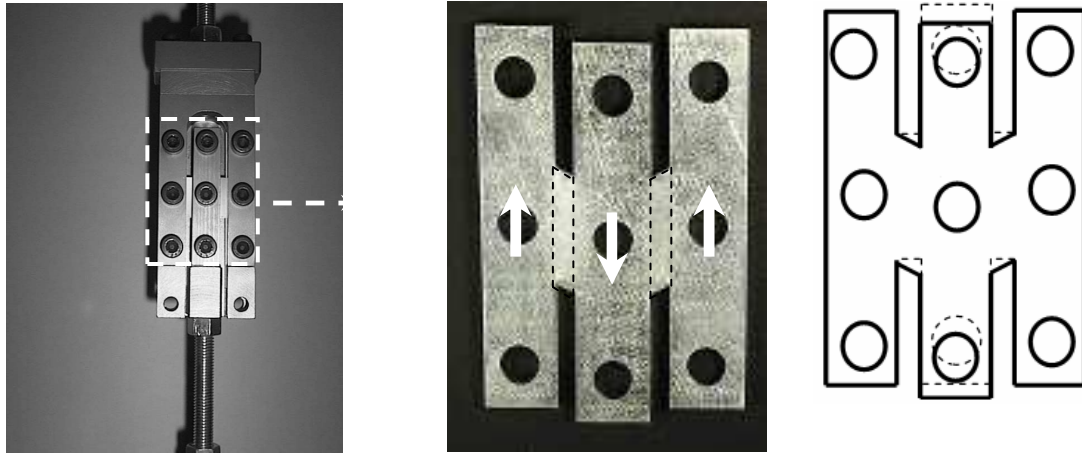


Figure 2.6: Dessin de définition d'une éprouvette Miyauchi.

<sup>5</sup> Ce rapport est de 4 sur l'éprouvette actuelle, alors qu'il était de 20 sur l'ancienne éprouvette.





Attelage servant à la fixation d'une éprouvette Miyauchi sur la machine de traction.

A gauche, photo d'une éprouvette Miyauchi. A droite, un dessin simplifié représentant en trait discontinu l'éprouvette à l'état initial et en trait plein l'éprouvette après déformation.

Figure 2.7: Description du montage et des éprouvettes utilisés pour les essais Miyauchi.

Sur la Figure 2.6, un dessin de définition détaillant les dimensions de l'éprouvette est présenté. Des photos du montage et de l'éprouvette sont représentées sur la Figure 2.7.

### 2.3.2.2. Analyse mécanique homogène de l'essai de cisaillement

#### *a. Eléments de l'analyse homogène*

En supposant en première approximation que la contrainte de cisaillement est uniformément répartie dans la zone utile de l'éprouvette, et en l'absence de tout glissement entre l'éprouvette et les mors de l'attelage, le dépouillement de l'essai Miyauchi peut être abordé de la manière suivante:

On considère les paramètres géométriques décrivant la déformation de la zone utile et présentés sur la Figure 2.8 où  $d$  définit le déplacement imposé à l'échantillon avec une vitesse de déplacement  $v$ ,  $l$  la longueur de la zone utile et  $h$  la largeur de la zone utile ( $l = 24mm$ ,  $h = 4mm$ ).

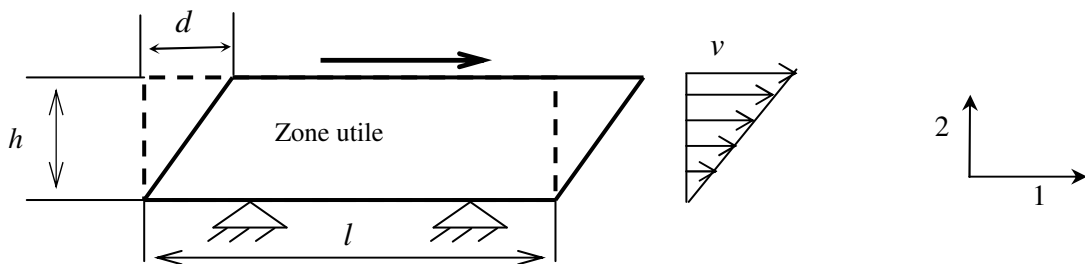


Figure 2.8: Représentation schématique de la déformation d'une zone utile de l'éprouvette Miyauchi.

Si on suppose de plus que le champ de vitesse varie linéairement en fonction de la coordonnée ( $y$ ) perpendiculaire à la direction de cisaillement, le vecteur vitesse est alors défini par :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{y}{h}v & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

On en déduit le tenseur taux des déformations qui s'écrit dans les axes de l'essai comme:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{2h} & 0 \\ \frac{v}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1,2,3)} \quad (2.62)$$

Comme le matériau est supposé incompressible, la déformation dans l'épaisseur est par conséquent nulle (l'épaisseur  $e$  de la tôle est supposée constante).

Le tenseur des contraintes est défini par:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1,2,3)} \quad (2.63)$$

D'après l'équation (2.23) et (2.30), la contrainte équivalente au sens du critère de Hill48 est exprimée comme:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{2N} \cdot \tau = \sqrt{\frac{(r_0 + r_{90})(1 + 2r_{45})}{r_{90}(1 + r_0)}} \cdot \tau \quad (2.64)$$

$N$  le paramètre d'anisotropie,  $\tau$  la cisssion calculée à partir de l'effort mesuré  $F$  :

$$\tau = \frac{F}{2le} \quad (2.65)$$

Le facteur 2 exprime le fait que la force mesurée est répartie entre les deux zones utiles de l'éprouvette (Figure 2.7).

Pour déterminer une déformation équivalente au sens du critère de Hill48, on utilise la définition du travail plastique équivalent :

$$w = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\tau \cdot \dot{\varepsilon}_{12} = \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}} \quad (2.66)$$

Ensuite, à partir des équations (2.64) et (2.65), on déduit le taux de déformation équivalent :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{v}{h} \quad (2.67)$$

Par intégration temporelle, la déformation équivalente est calculée à partir du déplacement mesuré  $d$  comme :

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{r_{90}(1 + r_0)}{(r_0 + r_{90})(1 + 2r_{45})}} \cdot \gamma \quad (2.68)$$

où  $\gamma$  est le taux de cisaillement correspondant à :  $\gamma = d/h$ .

### ***b. Analyse de l'effet de la direction de cisaillement***

Jusqu'ici, on s'est peu intéressé aux effets de l'orientation de la direction de cisaillement par rapport à celle de laminage. Dans ce paragraphe, et en s'appuyant sur l'analyse de [Hill, 2000] présentée au paragraphe §1.4.2, on discutera le problème de l'orientation.

D'une manière générale, trois cas d'orientation sont à distinguer :

- Lorsque la direction de cisaillement coïncide avec l'un des axes d'orthotropie du matériau, l'état de contrainte associé est alors un état de cisaillement simple défini par le tenseur des contraintes (2.63) écrit dans le repère d'orthotropie (qui correspond au repère de chargement). Après transformation de (2.42) dans l'espace  $(X, Y, Z)$ , l'état de contrainte s'écrit :

$$X = \frac{0-0}{\sqrt{2}} = 0 \quad ; \quad Y = \frac{0+0}{\sqrt{2}} = 0 \quad ; \quad Z = \sqrt{2}\tau \quad (2.69)$$

Dans ces conditions de chargement, il est aisé de voir que la deuxième équation de la condition de coaxialité (2.49) est vérifiée. Il en découle que le tenseur des déformations décrit aussi un état de cisaillement simple dans le repère de chargement (2.62).

- Si la direction de cisaillement est orientée à  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage, il est facile de voir que le repère principal des contraintes correspond au repère d'orthotropie. Dans ces conditions, le chargement dans le repère d'orthotropie s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad (2.70)$$

Transformé dans le repère dans l'espace  $(X, Y, Z)$ , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$X = \sqrt{2}\tau \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad (2.71)$$

La première équation de la condition de coaxialité (2.49) est alors vérifiée. Par conséquent, le repère principal des déformations coïncide aussi avec le repère d'orthotropie, et le tenseur des déformations  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  est défini par :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v}{2h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad (2.72)$$

En transformant ce tenseur vers le repère de l'essai, on retrouve un état de cisaillement simple décrit par le tenseur (2.62).

- Considérons à présent une configuration pour laquelle la direction de cisaillement est orientée d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction de laminage. Hormis les cas que l'on vient de mentionner

( $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ), la condition de coaxialité n'est plus vérifiée, et le repère principal des déformations est par conséquent décalé d'un angle  $\beta$  par rapport au repère principal des contraintes.

En adoptant un critère de Hill48 en contraintes planes (2.31), on démontre en annexe A que l'orientation du repère principal des déformations (définie par l'angle  $\beta$ ) est déduite à partir de l'angle de cisaillement ( $\theta$ ) et des coefficients de Lankford du matériau par la relation suivante :

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left[ -2 \cdot \frac{r_0 + 2 \cdot r_{90}}{(r_0 + r_{90})(1 + 2r_{45})} \cdot \tan(2\theta) \right] - \theta \quad (2.73)$$

Nous traçons sur la Figure 2.9, l'évolution de cet angle  $\beta$  en fonction de la direction de cisaillement  $\theta$ , et nous analysons l'influence des trois coefficients de Lankford. Il ressort de ces graphes les remarques suivantes :

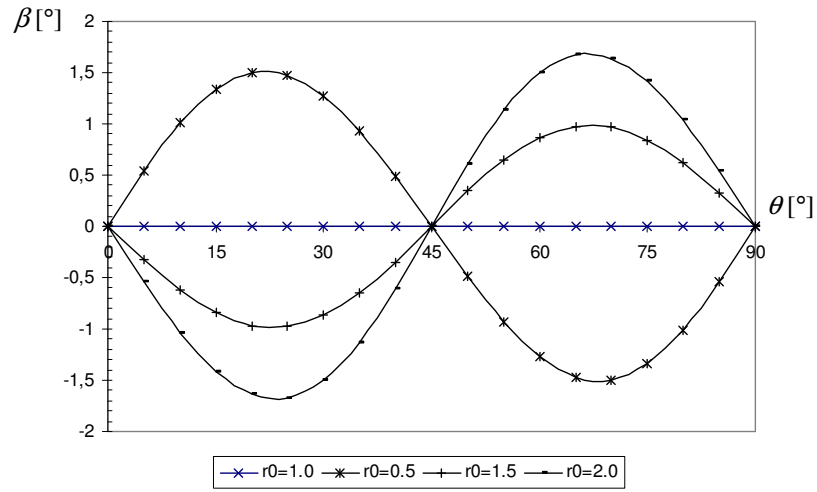
- Sur les trois graphes, et indépendamment des valeurs des coefficients de Lankford, on retrouve que la condition de coaxialité est vérifiée lorsque les directions de cisaillement correspondent à ( $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ). Ceci se traduit par un angle  $\beta = 0$ .
- On retrouve les effets symétriques des coefficients de Lankford  $r_0$  et  $r_{90}$ ,
- Globalement, le degré de désorientation entre le repère principal des déformations et celui des contraintes est d'autant plus important que les coefficients de Lankford s'écartent de l'unité. Ceci se traduit par une amplitude des courbes plus grandes pour les valeurs élevées des coefficients de Lankford.
- On remarque que le paramètre  $r_{45}$  est plus particulièrement influent sur le niveau de désorientation (i.e sur la valeur de  $\beta$ ). A titre d'exemple, pour un coefficient  $r_{45} = 2$  (et  $r_0 = r_{90} = 1$ ), l'angle de désorientation peut atteindre une valeur maximale de  $\approx 8^\circ$ . En revanche, lorsque  $r_0 = 2$  (et  $r_{45} = r_{90} = 1$ ), la désorientation ne dépasse pas  $\approx 2^\circ$ .

### Conséquences

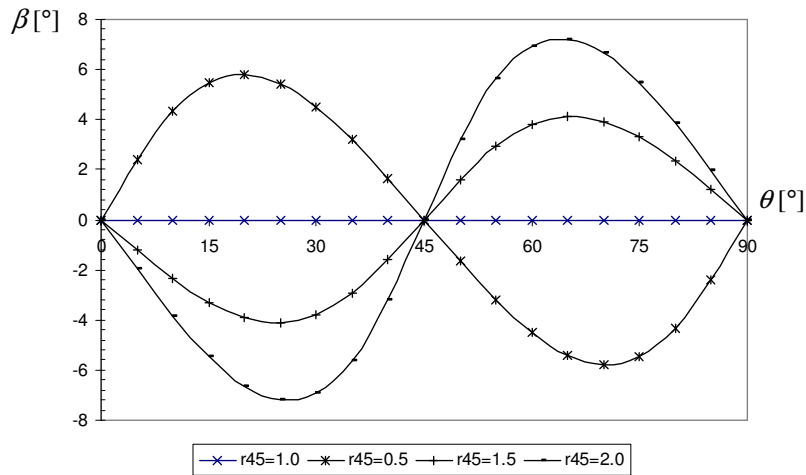
En théorie, la condition de non coaxialité signifie qu'au niveau du repère de chargement (dans lequel le tenseur des contraintes est associé à un tenseur de cisaillement simple (2.63)), le tenseur des déformations ne correspond plus à un état de cisaillement simple : il admet des termes diagonaux d'expansion non nuls. Ceci n'est autre que la conséquence de l'opérateur de rotation entre le repère principal des déformations et le repère de chargement.

Dans la pratique, comme les conditions cinématiques de l'essai font que toute déformation en expansion est interdite, il s'en suit que l'expansion (due à l'opérateur rotation) sera accommodée par la génération de contraintes d'expansion. Dans ce cas, l'état de contrainte ne correspond plus rigoureusement à un état de chargement de cisaillement simple.

(a) Effet de  $r_0$  pour  $r_{45}=r_{90}=1$



(b) Effet de  $r_{45}$  pour  $r_0=r_{90}=1$



(c) Effet de  $r_{90}$  pour  $r_0=r_{45}=1$

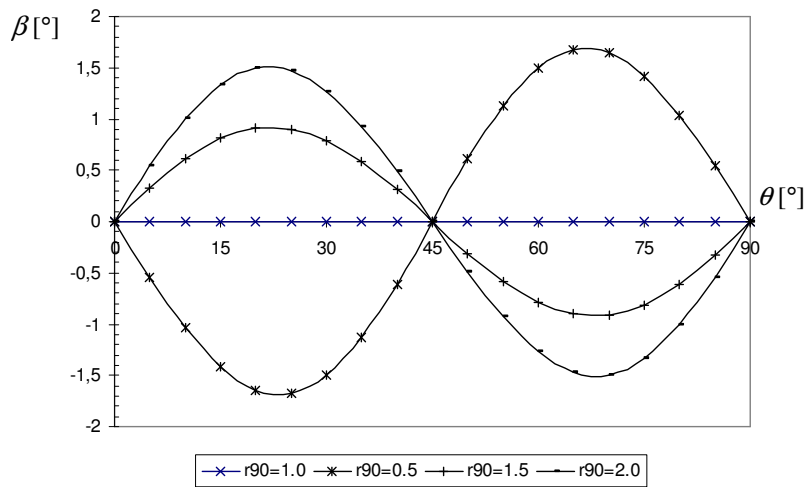


Figure 2.9: Effet des coefficients de Lankford sur l'orientation entre le repère principal des contraintes et le repère principal des déformations pour un essai de cisaillement simple.

### 2.3.2.3. Dépouillement de l'essai

Les essais de cisaillement ont été menés sur une machine de traction DARTEC avec un capteur d'effort de 50KN. Le déplacement de la bande milieu de l'éprouvette est mesuré grâce au déplacement total de la traverse. Le choix d'un tel système de mesure globale a été dicté par la géométrie étroite de la zone utile. En effet, l'utilisation d'extensomètres dans une bande de 4mm de largeur s'avère être délicat. L'utilisation d'un système de mesure par corrélation d'images est envisageable mais nécessite l'utilisation d'un dispositif optique assez « sophistiqué » pour permettre l'accès à la zone utile de l'éprouvette, durant les essais.

Le matériau choisi pour l'étude est l'acier doux DC04 dont les propriétés mécaniques sont présentées au Tableau 2-3. L'essai a été mené suivant la direction de laminage du matériau à une vitesse de déformation de  $0.025s^{-1}$ .

**Tableau 2-3 :** Paramètres mécaniques du DC04 (1.8 mm).

	Epaisseur [mm]	Coefficient de Lankford			$\bar{\sigma} = K\bar{\epsilon}^n$	
		$r_0$	$r_{45}$	$r_{90}$	$K[mm]$	$n$
<b>DC04</b>	1.8	1.63	1.53	2.02	502	0.225

La courbe représentant l'évolution de la cission  $\tau$  en fonction du taux de cisaillement  $\gamma$  est reportée sur la Figure 2.10. Celle-ci peut être transformée, moyennant les équations (2.63), (2.67), en une courbe d'écrouissage. En théorie, la transformation doit assurer une équivalence entre l'écrouissage en traction et celui en cisaillement. Cependant, un écart peut être observé entre ces deux courbes (courbe rouge et noir sur la Figure 2.10).

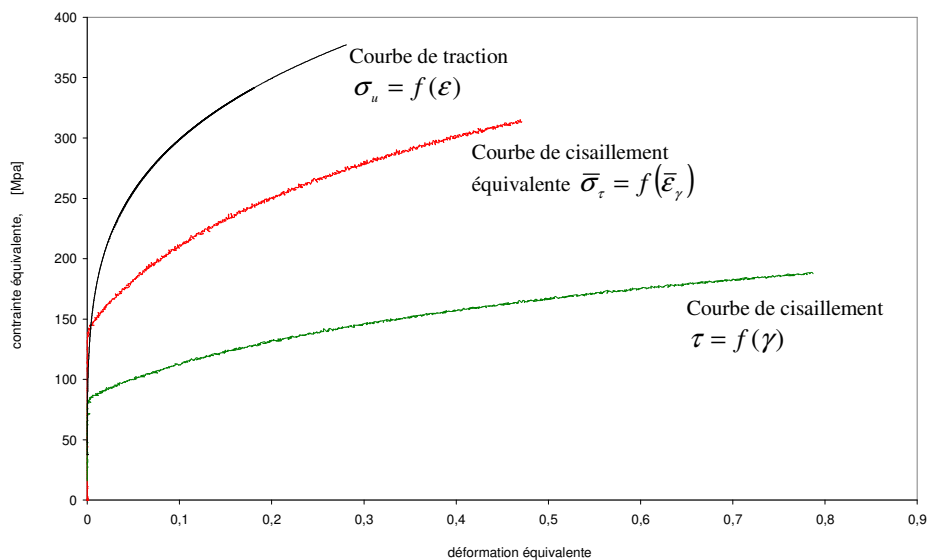


Figure 2.10: Comparaison entre les courbes d'écrouissage en traction simple et en cisaillement simple.

En rapportant, sur la Figure 2.11, l'évolution du rapport de la contrainte de traction uni-axiale par la contrainte de cisaillement ( $\sigma_0/\tau$ ), on note qu'assez rapidement ce rapport atteint une valeur

stationnaire estimée à 43% d'écart par rapport à la valeur que prédit le modèle de Hill48. L'écart observé nous semble trop important pour être attribué aux seules erreurs inhérentes à la modélisation du comportement plastique par un critère de Hill. D'autres limitations dans les hypothèses adoptées pour l'analyse de l'essai de cisaillement peuvent contribuer à ces écarts.

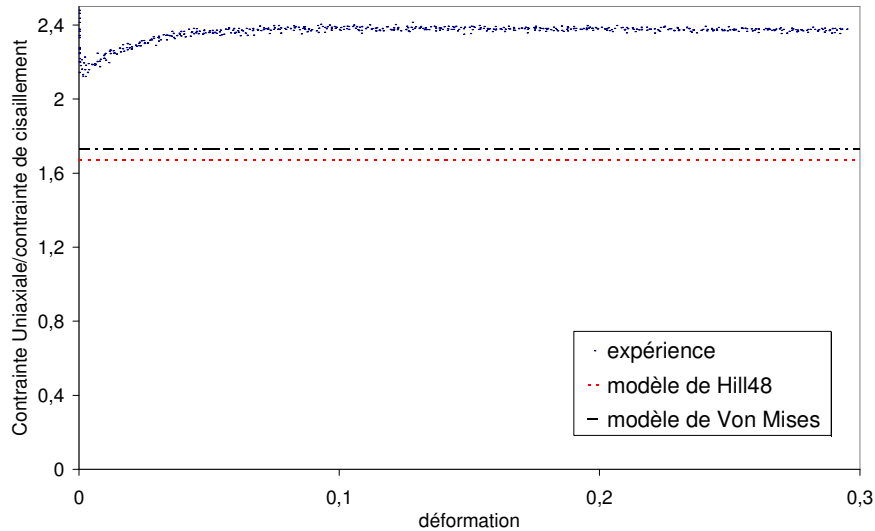


Figure 2.11 : Evolution du rapport  $(\alpha_\tau = \sigma_0/\tau)$  et comparaison avec les prédictions du critère de Hill (1948).

Avant d'aborder ces limitations, notons que certains auteurs [Hora et al, 2000], [Sigvant, 2003] utilisent la valeur asymptotique du rapport des contraintes  $(\alpha_\tau = \sigma_0/\tau)$  expérimental pour transformer la courbe de cisaillement en une courbe d'écroutissage équivalente:

$$\bar{\sigma} = \alpha_\tau \cdot \tau \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{\alpha_\tau} \cdot \frac{d}{h} \quad (2.74)$$

Pour un alliage d'aluminium AA5182, [Hora et al, 2000] a identifié un rapport de contraintes  $\alpha_\tau = 2.8$ , qui est du même ordre de grandeur que celui retrouvé par nos essais sur l'acier.

Cependant, avec une telle approche, il n'est plus possible de distinguer les erreurs dues au critère de plasticité de celles dues à l'essai, les courbes ainsi obtenues ne sont pas suffisamment fiables.

#### 2.3.2.4. Limites du modèle homogène

Nous avons utilisé pour le dépouillement des essais de cisaillement un modèle homogène. Ce modèle reste par ailleurs « idéal » si on le compare aux conditions réelles de l'essai pour lequel plusieurs restrictions sont à noter. Ces limitations touchent aussi bien le calcul des contraintes que le calcul des déformations.

##### ***a. Limitations dans le calcul de la déformation***

Le calcul de la déformation que nous avons adopté repose sur une mesure du déplacement donnée par le déplacement total de la traverse. Le problème avec cette technique provient de son caractère global. En effet, cette mesure globale entraîne l'introduction de plusieurs erreurs :

- erreur due à la présence de jeux dans l'attelage : ces jeux peuvent, toutefois, être réduits en utilisant un dispositif précontraint.
- erreur due à la rigidité du montage : cette erreur intervient aussi bien dans le calcul de la déformation que dans le calcul de la contrainte.
- erreur due au glissement entre l'éprouvette et les mors : on a pu constater, lors des premières expérimentations, un glissement de l'éprouvette entre les mors de l'attelage. Une marque très caractéristique de la présence de ce type de glissement se manifeste par l'ovalisation des alésages de fixation de l'éprouvette et tout particulièrement l'alésage situé au milieu de l'éprouvette. Deux techniques peuvent aider à réduire ces effets parasites ; la première est l'usinage de stries sur les faces des mors en contact avec l'éprouvette et la deuxième consiste à graisser les vis de fixation avant de serrer le montage ; on a pu constater une réduction du glissement de l'éprouvette mais sans pour autant parvenir à l'éliminer complètement.

Afin de réduire les deux premières sources d'erreur, il est nécessaire de disposer d'un moyen de mesure de déplacement qui soit le plus proche possible de la zone utile ; par exemple via l'utilisation d'un capteur de déplacement fixé à l'attelage ou une mesure par corrélation d'image.

Le glissement au niveau de l'éprouvette influe sur l'homogénéité du champ de déformation dans la zone utile : sa présence entraîne un écoulement de matière de la zone sous les mors vers la zone utile de l'éprouvette ce qui entraîne une perturbation du champ de cisaillement. Mais l'homogénéité du champ de cisaillement n'est pas uniquement fonction du glissement ; elle est aussi conditionnée par l'homogénéité du champ de contrainte, or ce champ est inévitablement hétérogène au voisinage des bords libres de la zone utile (cf. §2.3.2.4.b).

Genevois [Genevois, 1992] introduit un coefficient correcteur permettant de prendre en compte l'hétérogénéité du champ de cisaillement. L'auteur identifie ce paramètre en calant les mesures données par un capteur de déplacement par rapport à celle données par des mesures locales du champ de déformation. L'inconvénient de cette approche est que le coefficient identifié dépend du matériau et des conditions de l'essai.

D'autres auteurs [Vreede, 1992], [Rusinek et al, 2001] utilisent des coefficients de correction estimés par des simulations numériques. Ceci suppose une très bonne fiabilité des simulations et une connaissance a priori des propriétés du matériau.

### ***b. Limitations dans le calcul de la contrainte***

L'homogénéité de la contrainte a déjà fait l'objet d'études [Miyauchi, 1984] où il a été démontré qu'en raison de la présence du bord libre, la contrainte de cisaillement est obligatoirement hétérogène au voisinage de ces bords.

Pour s'en convaincre, on a simulé la déformation en cisaillement de la zone utile. Un modèle 3D, dont le maillage est présenté sur la Figure 2.12, a été mis en place et la simulation menée avec Forge3®. Une condition de vitesse imposée a été appliquée sur la face latérale supérieure de la zone utile, alors qu'une condition de blocage total est imposée sur la face inférieure, les deux autres bords restant libres. Les conditions aux limites ainsi définies correspondent à un état de cisaillement simple. Les



effets de glissement ne sont donc pas pris en compte, notre objectif étant l'étude de l'effet du bord sur l'état de contrainte. En outre, un modèle de Hill48 a été utilisé pour simuler l'essai de cisaillement du DC04 (Tableau 2-3).

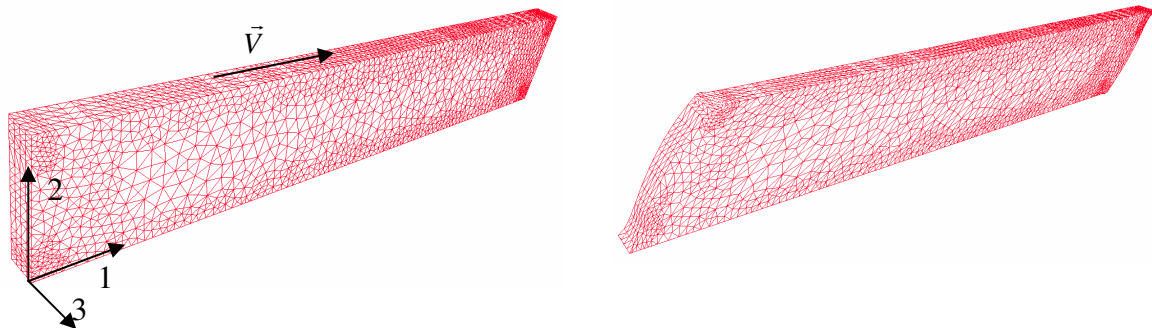


Figure 2.12 : Maillage de la zone utile d'un éprouvette Myiauchi :a/ maillage avant déformation.  
b/ maillage après déformation.

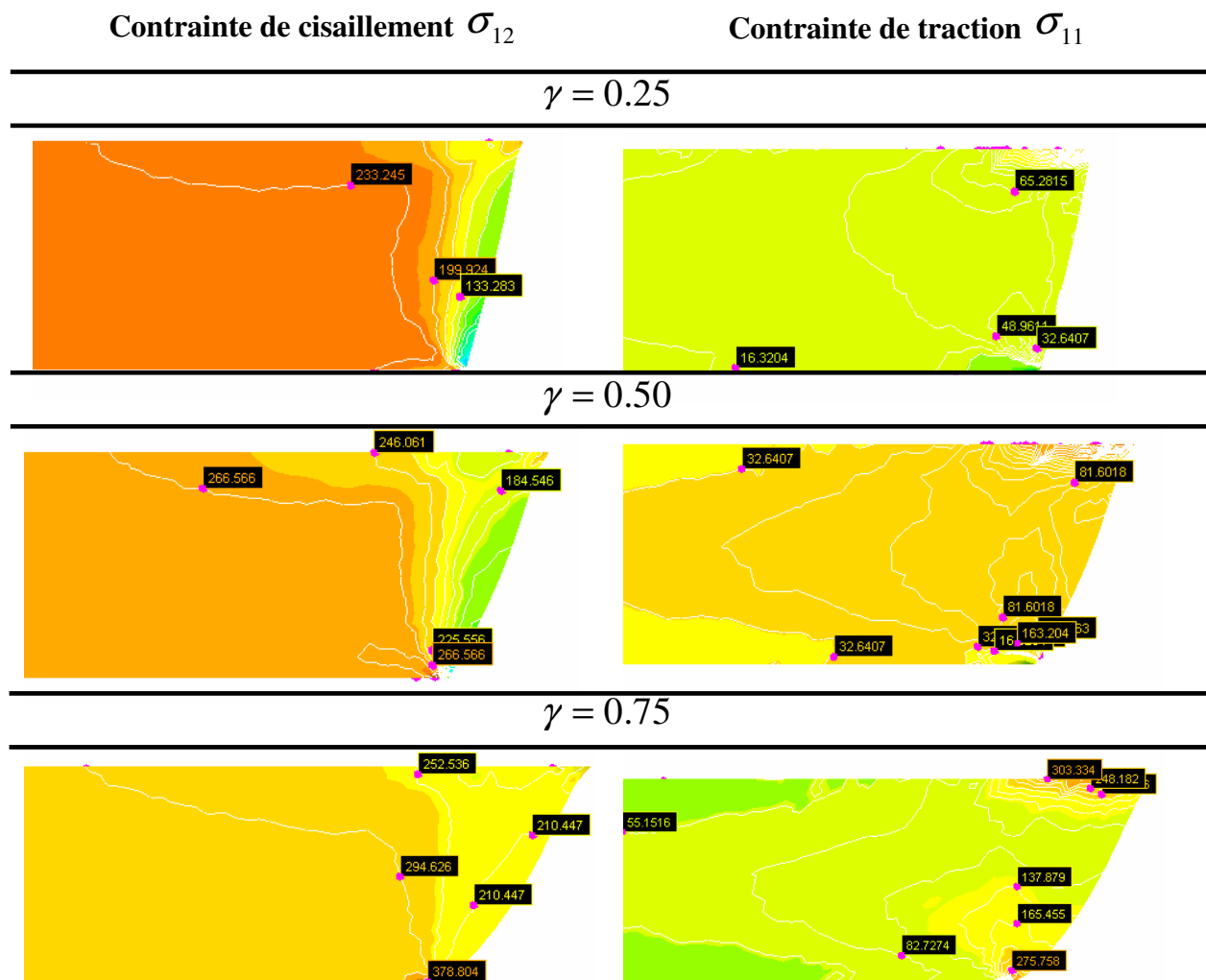


Figure 2.13 : Evolution de la distribution du champ de contrainte de cisaillement et de traction dans la zone utile d'une éprouvette Miyauchi.

Les évolutions de la distribution des contraintes de cisaillement pour différents taux de cisaillement sont présentées sur la Figure 2.13. Il apparaît un état de contrainte non uniforme caractérisé par une hétérogénéité assez localisée au niveau du bord. L'étendue de cette zone de contrainte hétérogène évolue en fonction du taux de cisaillement. Signalons aussi que le niveau des contraintes de traction, au centre de l'éprouvette, est relativement élevé par rapport à la contrainte de cisaillement (Figure 2.14).

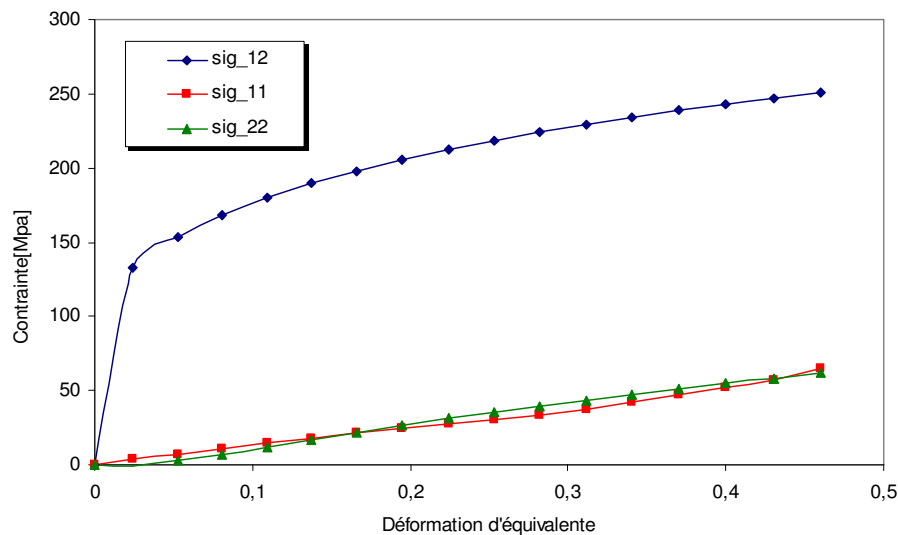


Figure 2.14 : Simulation de l'évolution de l'état de contrainte pour un essai de cisaillement du DC04.

### Effet de la rotation plastique

Le critère de Hill est établi dans le repère d'orthotropie du matériau. Les calculs de la contrainte équivalente et de la loi d'écoulement doivent nécessairement être effectués dans ce repère. Parallèlement, dans le code de calcul Forge3®, les mêmes grandeurs (tenseur des contraintes, tenseur des déformations et tenseur des taux de déformation) sont écrites dans un référentiel global fixe. L'intégration du critère de Hill dans le code Forge3® passe donc par la définition d'une matrice de rotation entre le repère global de calcul et le repère d'orthotropie. Si l'orientation de ce dernier est bien donnée par l'utilisateur en début du calcul, il est néanmoins bien connu que ce repère (i.e repère d'orthotropie) subit le mouvement de la matière à laquelle il est rattaché. Il s'impose donc de suivre son évolution tout au long de la simulation. Ce mouvement est appelé la **rotation plastique**.

La modélisation de la rotation plastique reste jusqu'à aujourd'hui un sujet de controverse, ou tout du moins un point complexe à traiter. Plusieurs approches et théories ont été proposées. L'une des approches (et c'est celle qui a été retenue pour le code Forge3®, cf. chapitre 4 §5.2.3) consiste à supposer que la rotation plastique correspond à la rotation de la matière. Celle-ci est facilement accessible à partir du tenseur de transformation  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.75)$$

où  $x$  est la coordonnée courante,  $X$  coordonnée initiale. Ce tenseur se décompose en un tenseur d'étirement  $\mathbf{U}$  et un tenseur orthogonal de rotation  $\mathbf{R}$  :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2.76)$$

Dans le cas de la simulation de l'essai de cisaillement, la matrice de rotation s'écrit:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Où l'angle de rotation est calculé à partir du taux de cisaillement [Tugcu et al, 1-1999] :

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (2.78)$$

Cette expression révèle que pour un taux de cisaillement prescrit, la rotation plastique est identique pour tous les matériaux : elle ne tient aucunement compte des propriétés d'anisotropie du matériau. D'un autre côté, comme le tenseur des contraintes est en rotation continue, l'état de chargement varie aussi au cours du cisaillement et des contraintes de tractions ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) apparaissent en conséquence (Figure 2.14).

La prise en compte de la rotation plastique par décomposition polaire s'avère donc inappropriée pour la simulation du cisaillement. Ainsi, envisager la simulation numérique comme outil d'estimation des corrections à apporter aux mesures expérimentales ne semble pas être un moyen fiable.

D'autres modèles basés sur la théorie de la rotation plastique « plastic spin » sont plus à même de modéliser ces effets. Ce type de modèle a été appliqué avec succès par Dafalias [Dafalias, 2000] pour modéliser les observations expérimentales de Kim et al. [Kim et al, 1997] concernant la rotation plastique lors d'essais de traction hors axes.

Par ailleurs, et de part leur formulation, les modèles poly-cristallins (modèles micros) sont également en mesure de suivre l'évolution de la rotation plastique ainsi que de l'état d'anisotropie (généralement connue pour évoluer à partir d'une déformation de 0.15).

### Synthèse

Nous avons abordé l'analyse homogène de l'essai de cisaillement et ses limites. Au vu de cette étude, il est apparu indispensable d'introduire des coefficients correcteurs pour le dépouillement de l'essai. Ces coefficients sont sensés compenser les effets de glissement, de bord libre et les effets d'un état de chargement multiaxial (contraintes normales non nulles). Dans la mesure où il nous semble difficile de déterminer avec une bonne précision ces coefficients correcteurs (mesures expérimentales ou simulations numériques), nous avons choisi d'identifier le comportement des tôles en grandes déformations en utilisant l'essai de gonflage circulaire comme alternative à l'essai Miyauchi.

### 2.3.3. Essai de gonflage circulaire

#### 2.3.3.1. Généralités

L'essai de gonflage hydraulique circulaire est un essai de caractérisation dont l'exploitation peut être double: d'une part il offre la possibilité d'identifier une courbe d'écroutissage qui couvre une grande plage de déformations, et d'autre part, il peut servir à déterminer le point limite en déformation équibiaxiale (on abordera les points limites avec plus de détails dans le chapitre 3). Il est bien établi que l'essai de traction, classiquement utilisé dans la caractérisation des tôles, est limité par l'apparition de la striction diffuse qui se manifeste pour une déformation effective de l'ordre du coefficient d'écroutissage. Cependant, en gonflage, la striction apparaît plus « tardivement » et la phase de déformation homogène est alors prolongée. C'est au vu de ces propriétés que notre intérêt s'est porté sur l'utilisation de l'essai de gonflage pour l'identification des courbes d'écroutissage en grandes déformations.

L'étude de cet essai a fait l'objet de plusieurs travaux dans la littérature [Hill, 1950], [Wang et al, 1969], [Storakers, 1983], [Hill, 1980] et son domaine d'exploitation n'est pas restreint à l'unique usage en mise en forme des tôles mais il est étendu à d'autres applications telles que la caractérisation de films minces en polymères [Zheng-Xue et al, 2003], ou de films minces métalliques [Li et al, 2004], [Pavot et al, 1995].

Ces dernières années, l'essai de gonflage a connu un important regain d'intérêt ([Rees, 1994], [Rees, 1999], [Banabic et al, 2001], [Novotny, 2001]), qui peut être attribué à l'élargissement et à l'industrialisation du procédé d'hydroformage, procédé qui s'apparente beaucoup aux essais de gonflage hydraulique.

#### 2.3.3.2. Etude d'un essai de gonflage circulaire: modélisation analytique

On se propose dans ce qui suit d'analyser l'essai de gonflage circulaire tout en adoptant le critère de plasticité anisotrope de Hill48 pour la description du comportement des tôles.

##### *a. Critère de Hill48 en contraintes planes*

Avant d'aborder le dépouillement de l'essai, on explicite d'abord une expression du critère de Hill (1948) sous l'hypothèse des contraintes planes et en supposant le repère principal des contraintes coïncidant avec le repère d'orthotropie. Partant de l'expression (2.30), la contrainte équivalente est alors définie dans le repère principal par :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{r_{90}(1+r_0) - 2r_0r_{90}\Omega + r_0(1+r_{90})\Omega^2}}{\sqrt{r_{90}(1+r_0)}} \sigma_1 \quad (2.79)$$

avec  $\Omega$  défini par :

$$\Omega = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (2.80)$$

Pour une loi d'écoulement associée, la déformation équivalente s'écrit :

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{1+r_0} \sqrt{r_0(1+r_{90}) + 2r_0r_{90}\beta + r_{90}(1+r_0)\beta^2}}{\sqrt{r_0 + r_0r_{90} + r_0^2}} d\varepsilon_1 \quad (2.81)$$

avec  $\beta$  défini par :

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2^p}{d\varepsilon_1^p} \quad (2.82)$$

Par ailleurs, il est possible de démontrer, en utilisant (2.82) et la loi de la normalité, que le rapport des contraintes est relié au rapport des déformations par la relation suivante :

$$\beta = \frac{r_0(1+r_{90})\Omega - r_0r_{90}}{r_{90}(1+r_0) - r_0r_{90}\Omega} \quad (2.83)$$

### ***b. Equation d'équilibre***

Dans la suite, on se place dans le repère d'orthotropie du matériau. Dans ce repère, l'état de contrainte au pôle d'une tôle gonflée est défini par le tenseur des contraintes suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Comme les contraintes principales sont confondues avec les axes d'orthotropie, la condition de coaxialité (2.46) est par conséquent vérifiée. Il s'en suit que le tenseur des déformations est aussi diagonal dans le repère d'orthotropie et s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

L'équation d'équilibre, ou équation de Pascal, est définie par :

$$\frac{\sigma_1}{R_\theta} + \frac{\sigma_2}{R_\phi} = \frac{P}{e} \quad (2.86)$$

où  $\sigma_1, \sigma_2$  sont les contraintes principales (confondues avec les axes du matériau),  $R_\theta$  et  $R_\phi$  sont les rayons de courbure respectivement suivant les deux directions principales,  $P$  la pression de gonflage et  $e$  l'épaisseur courante au pôle de la tôle (Figure 2.15).

En introduisant le rapport des contraintes  $\Omega$  et en supposant que  $R_\theta \approx R_\phi = \rho$ , l'équation d'équilibre se réduit à :

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot \rho}{(1 + \Omega) \cdot e} \quad (2.87)$$

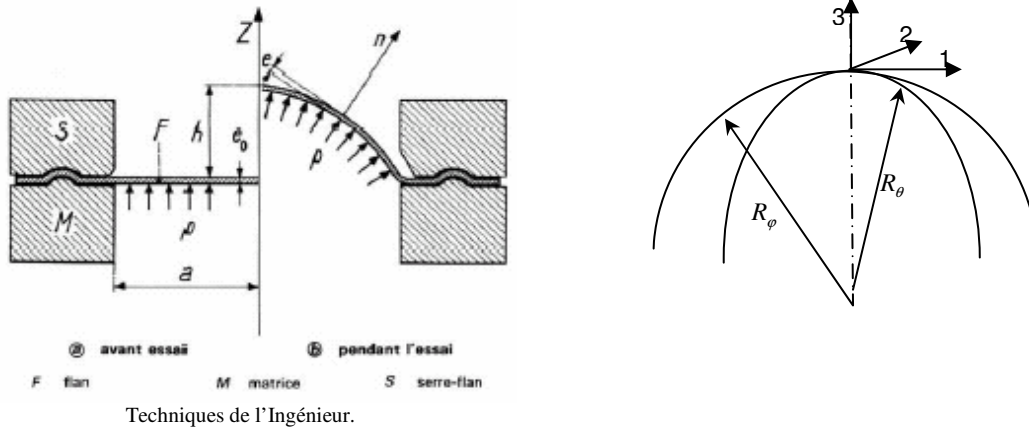


Figure 2.15 : Paramétrage d'un essai de gonflage circulaire.

En supposant que la géométrie de la tôle déformée est de forme sphérique, le rayon de courbure  $\rho$  peut être déduit à partir de la hauteur du dôme  $h$  sur un rayon  $a$  selon la relation du sphéromètre [1] :

$$\rho = \frac{a^2 + h^2}{2h} \quad (2.88)$$

On peut démontrer aussi que la déformation principale est définie par :

$$\varepsilon_1 = \ln\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) \quad (2.89)$$

A ce stade, on connaît la contrainte et la déformation principale en fonction des variables mesurables  $(h, a, e, P)$ . Il reste donc à déterminer le rapport de contrainte  $\Omega$  pour pouvoir établir une relation directe entre les efforts et les déformations.

Pour se faire, on va supposer en première approximation un état d'anisotropie normale. Ceci réduit le nombre des paramètres d'anisotropie au seul paramètre  $\bar{r}$ . Dans ce cas, le comportement est isotrope dans le plan de la tôle, il en découle donc un état de contrainte et de déformation équi-biaxiale ( $\beta = \Omega = 1$ ). La contrainte et la déformation équivalente (2.79), (2.81) sont alors définies par  $\bar{\sigma} = \sqrt{2/(1+\bar{r})} \cdot \sigma_1$ ,  $d\bar{\varepsilon} = \sqrt{2(1+\bar{r})} \cdot d\varepsilon_1$ .

En utilisant une loi d'écrouissage de type Hollomon (2.52) combinée avec les équations (2.79) et (2.89) et en tenant compte de l'expression de la déformation équivalente, la contrainte équivalente est alors définie par :

$$\bar{\sigma} = K \left( \sqrt{2(1+\bar{r})} \ln\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) \right)^n \quad (2.90)$$

En se basant sur l'hypothèse d'incompressibilité plastique, l'épaisseur courante au pôle est définie à partir de l'épaisseur initiale  $e_0$  par:

$$e = e_0 \exp\left(-2 \ln\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)\right) \quad (2.91)$$

L'équation finale reliant la pression de gonflage à la hauteur du dôme est déduite à partir des équations (2.88) , (2.90) , (2.91) et tenant compte de l'expression de la contrainte équivalente :

$$P = 2\sqrt{2(1+\bar{r})}K \frac{e_0 h}{a^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)^3} \left( \sqrt{2(1+\bar{r})} \ln\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) \right)^n \quad (2.92)$$

Sur la Figure 2.16 sont reportées les courbes d'évolution de la pression de gonflage en fonction de la hauteur du dôme pour divers coefficients d'anisotropie (2.92). Il convient de souligner les remarques suivantes :

- la pression de gonflage augmente graduellement jusqu'à atteindre le maximum de pression, appelée pression de rupture, au delà duquel commence une phase de déformation dite instable marquée par la décroissance de la pression bien que la tôle continue à gonfler.
- d'après la prédiction du modèle, la pression de rupture  $P_{\max}$  est très sensible au coefficient d'anisotropie ;  $P_{\max}$  augmente avec  $\bar{r}$ . En même temps, le modèle montre que la hauteur qu'atteint le matériau à la pression de rupture est indépendante du coefficient d'anisotropie.

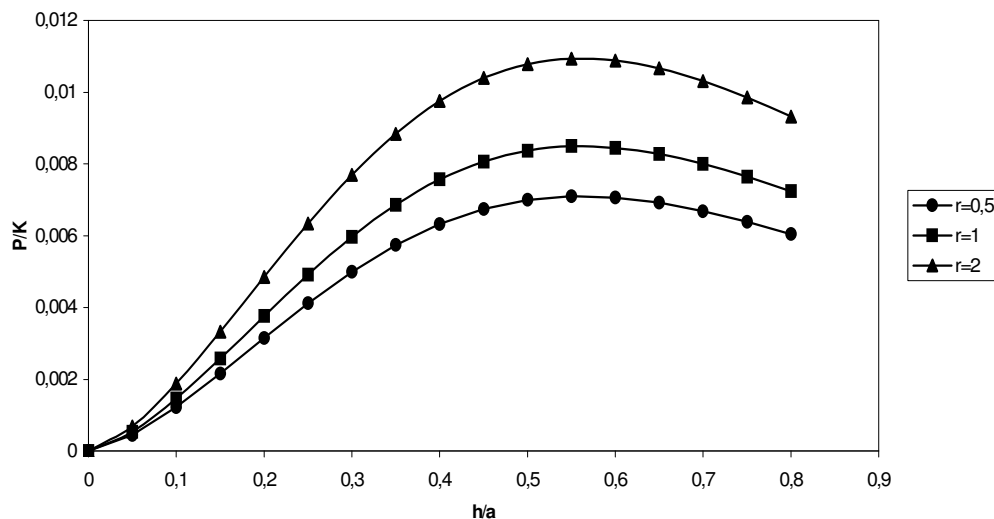


Figure 2.16: Effet du coefficient d'anisotropie sur la courbe pression-hauteur. La pression et la hauteur présentées sur le graphe sont normalisées respectivement par la consistance du matériau  $K$  et par le rayon  $a$ .

### c. Courbe d'écrouissage

Pour l'exploitation du test de gonflage dans l'identification des courbes d'écrouissage, on reprend l'équation d'équilibre (2.87). Dans cette expression, les paramètres  $P$ ,  $\rho$  et  $e$  seront mesurés au cours de l'essai (cf. § 2.3.3.3). Le seul paramètre qui reste à définir est le rapport des contraintes  $\Omega$ . Intuitivement, on peut supposer un état de contrainte équi-biaxiale ( $\Omega=1$ ) pour décrire l'état de contrainte au pôle de la tôle, mais on verra plus loin que cette hypothèse n'est pas forcément la plus appropriée. Afin d'aborder ce problème, on présentera trois hypothèses différentes pouvant décrire l'état de chargement en gonflage circulaire, et on finira par en discuter la pertinence.

Commençons d'abord par définir une expression générique de la contrainte et de la déformation équivalente ; indépendamment de l'hypothèse adoptée, et en partant des équations (2.79), (2.81) et (2.87), la contrainte équivalente et la déformation équivalente peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma} = \tilde{G}(\Omega) \cdot \sigma_b \quad \bar{\varepsilon} = \tilde{H}(\beta) \cdot \varepsilon_3 \quad (2.93)$$

avec :

$$\sigma_b = \frac{P \cdot \rho}{e_0 \cdot e^{-\varepsilon_3}} \quad \text{et} \quad \tilde{G}(\Omega) = \frac{\sqrt{r_{90}(1+r_0) - 2r_0r_{90}\Omega + r_0(1+r_{90})\Omega^2}}{\sqrt{r_{90}(1+r_0)(1+\Omega)^2}} \quad (2.94)$$

L'expression des deux fonctions  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  dépendra de l'hypothèse utilisée. Parallèlement, d'après le principe de l'équivalence du travail, ces deux fonctions vérifient :

$$\tilde{H} = \frac{1}{2\tilde{G}} \quad (2.95)$$

### ***Hypothèse d'anisotropie normale***

En première hypothèse, on va considérer une anisotropie normale. Dans ce cas, aussi bien l'état de contrainte que l'état de déformation sont équi-biaxiaux [Kleemola et al, 1976]:

$$\Omega = 1 ; \beta = 1 \quad (2.96)$$

Les deux fonctions  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  sont alors définies par :

$$\tilde{H} = \sqrt{\frac{1+\bar{r}}{2}} \quad ; \quad \tilde{G} = \frac{1}{\sqrt{2(\bar{r}+1)}} \quad (2.97)$$

### ***Hypothèse d'anisotropie transverse***

#### *Hypothèse de contrainte équi-biaxiale*

Dans l'hypothèse d'une anisotropie transverse, et pour un état de contrainte équi-biaxiale ( $\Omega = 1$ ) [Rees, 1994], l'équation (2.83) conduit à:

$$\Omega = 1 \Rightarrow \beta = \frac{r_{90}}{r_0} \quad (2.98)$$

La contrainte équivalente et la déformation équivalente sont définies à partir des équations (2.94) et (2.95) par:

$$\tilde{H} = \sqrt{\frac{r_{90}(1+r_0)}{(r_0+r_{90})}} \quad ; \quad \tilde{G} = \frac{\sqrt{r_0+r_{90}}}{\sqrt{4 \cdot r_{90}(1+r_0)}} \quad (2.99)$$



### Hypothèse de déformation équi-biaxiale

Pour une anisotropie transverse, et pour un état de déformation équi-biaxiale ( $\beta = 1$ ), on démontre à partir de l'équation (2.83) que:

$$\beta = 1 \Rightarrow \Omega = \frac{r_{90}(1 + 2r_0)}{r_0(1 + 2r_{90})} \quad (2.100)$$

Les paramètres  $\tilde{H}$  et  $\tilde{G}$  sont déduits alors à partir de (2.94) et (2.95):

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{(1+r_0)(r_0+4r_0r_{90}+r_{90})}}{\sqrt{4(r_0+r_0r_{90}+r_0^2)}} \quad ; \quad \tilde{G} = \frac{\sqrt{(r_0+r_0r_{90}+r_0^2)}}{\sqrt{(1+r_0)(r_0+4r_0r_{90}+r_{90})}} \quad (2.101)$$

On peut à ce niveau se poser la question suivante : quelle hypothèse faut-il adopter pour le dépouillement des essais de gonflage ?

L'hypothèse d'anisotropie normale peut être considérée comme une première approximation pour aborder l'analyse de l'essai de gonflage. De toute évidence, cette hypothèse perd de sa pertinence lorsque le matériau présente une forte anisotropie dans le plan ( $\Delta r \neq 0$ ). Pour comparer les hypothèses de déformation et de contrainte équi-biaxiales, on introduit l'écart relatif entre le paramètre  $\tilde{H}_{CB}$  (paramètre  $\tilde{H}$  calculé sous l'hypothèse de contrainte équi-biaxiale) et  $\tilde{H}_{DB}$  (paramètre  $\tilde{H}$  calculé sous l'hypothèse de déformation équi-biaxiale) comme suit <sup>6</sup>:

$$ecart_{\tilde{H}} = 100 \times \frac{|\tilde{H}_{CB} - \tilde{H}_{DB}|}{\tilde{H}_{CB}} \quad (2.102)$$

On reporte dans le Tableau 2-4, les différents matériaux de l'étude pour lesquels les coefficients de Lankford ont été identifiés par des essais de traction. Nous calculons, ensuite, sous l'une et l'autre des hypothèses, les paramètres caractéristiques de l'essai de gonflage ( $\beta, \Omega, \tilde{G}, \tilde{H}$ ). La comparaison entre les deux hypothèses sera considérée au travers de  $ecart_{\tilde{H}}$  et  $ecart_{\tilde{G}}$ .

Les résultats (Tableau 2-4) montrent que les écarts restent marginaux et ne dépassent pas les 0.36%. Il en découle donc que les courbes d'écrouissage associées aux deux hypothèses sont parfaitement comparables.

Toutefois, sous l'hypothèse de contrainte équi-biaxiale, le rapport des déformations  $\beta$  semble atteindre des valeurs significativement inférieures à l'unité : il est de l'ordre de 0.7 pour les aciers DC04 et DP450. Cette valeur nous semble assez éloignée des chemins de déformation physique, sur lesquels nous reviendrons un peu plus loin dans ce chapitre (§ 2.3.4.2).

---

<sup>6</sup> D'une manière analogue, on définit l'écart relatif au paramètre  $\tilde{G}$  comme :  $ecart_{\tilde{G}} = 100 \times \left| \frac{\tilde{G}_{CE} - \tilde{G}_{DE}}{\tilde{G}_{CE}} \right|$ .

**Tableau 2-4 :** Comparaison entre les coefficients  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  calculés sous l'hypothèse de contrainte équi-biaxiale et de déformation équi-biaxiale.

			Contrainte équi-biaxiale				Déformation équi-biaxiale				$ecart_{\tilde{G}}$	$ecart_{\tilde{H}}$
	$r_0$	$r_{90}$	$\beta$	$\Omega$	$\tilde{G}$	$\tilde{H}$	$\beta$	$\Omega$	$\tilde{G}$	$\tilde{H}$		
<b>Von Mises</b>	1.000	1.000	1.000	1	0.500	1.000	1	1.000	0.500	1.000	0.00 %	0.00 %
<b>DC04</b>	1.872	2.617	0.715	1	0.386	1.294	1	1.064	0.385	1.297	0.26 %	0.23 %
<b>DP450</b>	1.075	1.480	0.726	1	0.456	1.096	1	1.095	0.454	1.100	0.36 %	0.36 %
<b>TRIP800</b>	1.014	1.106	1.091	1	0.487	1.025	1	1.028	0.488	1.025	0.01 %	0.01 %

Au vu des faibles écarts observés entre l'hypothèse de contrainte équi-biaxiale et de déformation équi-biaxiale, on serait tenté de généraliser l'équivalence entre ces deux hypothèses (en terme de calcul des courbes d'écrouissage) pour tout autre matériau. Mais avant de tirer cette conclusion, il serait opportun de mener une étude comparative plus approfondie.

Pour ce faire, nous disposons des expressions analytiques des paramètres  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  sous les deux hypothèses (2.99) et (2.101). Il est alors possible de déterminer une expression de l'écart  $ecart_{\tilde{H}}$  qui devient fonction exclusive des paramètres d'anisotropie ( $r_0, r_{90}$ ) et dont le tracé est présenté sur la Figure 2.17.

On peut noter que la courbe d'écart s'annule suivant la première bissectrice du plan ( $r_0, r_{90}$ ). Suivant cette droite, le matériau présente une anisotropie normale puisque  $r_0 = r_{90}$ . On retrouve par conséquent l'équivalence entre les deux hypothèses puisque dans ces conditions on a bien un état de contrainte et de déformation équi-biaxiaux  $\beta = \Omega = 1$ .

L'accroissement de l'écart entre les deux hypothèses s'accroît dès lors que l'état d'anisotropie du matériau s'écarte d'un état d'anisotropie normale. Néanmoins, nous remarquons que la courbe présente une vallée au voisinage de la première bissectrice. Ceci veut dire que dans cette zone, l'écart entre les deux modèles reste très faible.

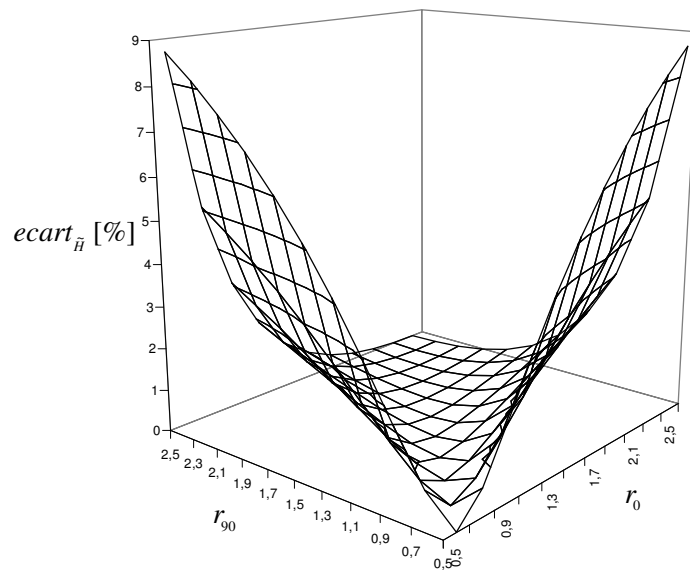


Figure 2.17: Influence des coefficients de Lankford sur l'écart  $ecart_{\tilde{H}}$ .

Pour une meilleure représentation de ce résultat, on se donne une valeur seuil qui définira l'écart au dessous duquel les deux modèles seront considérés comme équivalents. Une valeur de 0.5% semble convenable.

En introduisant cette valeur seuil, on définit ainsi un hyperplan parallèle au plan  $(r_0, r_{90})$ . Cet hyperplan coupe la courbe de l'écart relatif (Figure 2.17) suivant la section reportée sur le graphe de la Figure 2.18. Sur cette dernière, la zone foncée marque l'état d'anisotropie pour lequel l'écart est inférieur à 0.5%, et donc les deux hypothèses peuvent être considérées comme équivalentes.

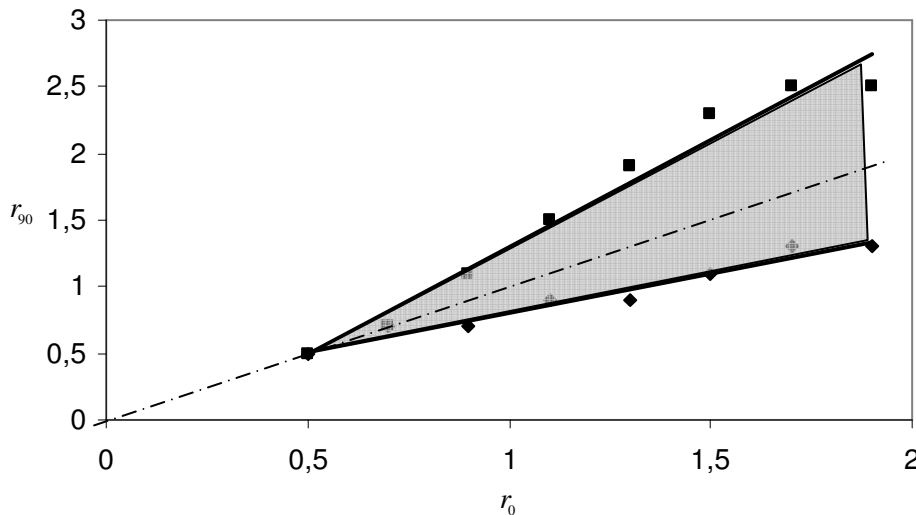


Figure 2.18: La zone grise marque l'état d'anisotropie pour lequel l'état de contrainte équi-biaxiale et de déformation équi-biaxiale sont équivalents à une erreur relative inférieure à 0.5%.

### Conclusion

L'adoption d'une hypothèse qui précise l'état de contrainte et de déformation s'avère nécessaire pour pouvoir dépouiller l'essai de gonflage. Deux hypothèses sont alors envisageables : la première suppose un état de contrainte équi-biaxiale et la deuxième considère un état de déformation équi-biaxiale. Le plus souvent, c'est la première hypothèse qui est adoptée dans la littérature. Cependant, on a pu noter que celle-ci conduit à des valeurs aberrantes du rapport des déformations  $\beta$ . On pense donc que c'est plutôt l'hypothèse de déformation équi-biaxiale qui est la plus à même de décrire l'état de contrainte en gonflage circulaire. Il n'en reste pas moins qu'une comparaison avec des mesures expérimentales sera le moyen le plus sûr pour confirmer ou infirmer ce choix.

On a pu également mener une étude comparative entre les deux modèles. Il s'est avéré que pour certains états d'anisotropie, les deux hypothèses sont très proches. A titre d'exemple, si on considère un matériau avec une valeur de  $r_0 = 1.5$ , le modèle de contrainte équi-biaxiale et le modèle de déformation équi-biaxiale sont équivalents pour tous les matériaux ayant une valeur de  $r_{90}$  vérifiant  $1.1 \leq r_{90} \leq 2.3$ .

### 2.3.3.3. *Procédure expérimentale*

On s'intéresse dans ce qui suit à la description du dispositif expérimental, du protocole et de la procédure de dépouillement des essais de gonflage.

#### *a. Dispositif expérimental*

La Figure 2.19 présente une vue d'ensemble de la machine de gonflage. La machine a été conçue et fabriquée au CEMEF. Elle est composée de trois unités :

- § Une première unité sert à la fixation de la tôle au cours du gonflage. Cette unité est composée d'une matrice et d'un serre-flan. Le serre-flan accueille un insert interchangeable de géométrie variable (Figure 2.20). Pour les essais de gonflage circulaire, un insert circulaire est utilisé. Pour d'autres essais de type gonflage elliptique (chapitre 3), des inserts elliptiques seront utilisés.
- § L'unité hydraulique est composée de deux systèmes :
  - Un premier circuit hydraulique haute pression sert à la fermeture du serre-flan, et fixe ainsi la tôle entre la matrice et le serre-flan. L'effort de serrage maximal que peut atteindre la machine est de 104 Tonnes.
  - Une fois la tôle fixée, le deuxième circuit hydraulique entre en action en injectant l'eau sous pression qui sert au gonflage proprement dit de l'échantillon. Un surpresseur permet d'atteindre des pressions de gonflage suffisamment élevées (jusqu'à 450 bars). Le circuit peut être commandé aussi bien en pression qu'en débit. Le pilotage des essais de gonflage a été fait par débit imposé.
- § L'unité de commande et d'acquisition assure à la fois le pilotage et l'acquisition des données de l'essai. La pression est mesurée en temps réel par un capteur. Pour le suivi de la déformation de la tôle, un système de corrélation d'images composé de deux cameras CCD et du logiciel de corrélation d'images Aramis© a été utilisé [2].

#### *b. Système de corrélation d'image 3D*

Pour pouvoir analyser les essais de gonflage, on a vu qu'il faut disposer d'une mesure directe de l'amincissement au pôle de la tôle gonflée et d'une mesure de son rayon de courbure (2.87). Les techniques « classiques » de mesure de déformation locale par calcul, manuelle ou automatique, de la distorsion d'une grille imprimée peuvent être utilisées pour la détermination du champ d'amincissement au pôle. Mais, à elles seules ces techniques ne sont pas suffisantes puisqu'elles ne permettent pas de mesurer le rayon de courbure, et le plus souvent un sphéromètre est utilisé à cet effet.

Au CEMEF, grâce à un système de corrélation d'images 3D, il est possible de mesurer le champ de déplacement et de déformation d'une tôle sous chargement. Fixé sur la machine de gonflage, et à travers un capot en plexiglas (Figure 2.19), ce système a été utilisé pour suivre le gonflage en continu d'une tôle. Les cartes de déformations et de déplacements fournies par le système ont été ensuite exploitées pour déterminer l'amincissement et le rayon de courbure de la tôle.

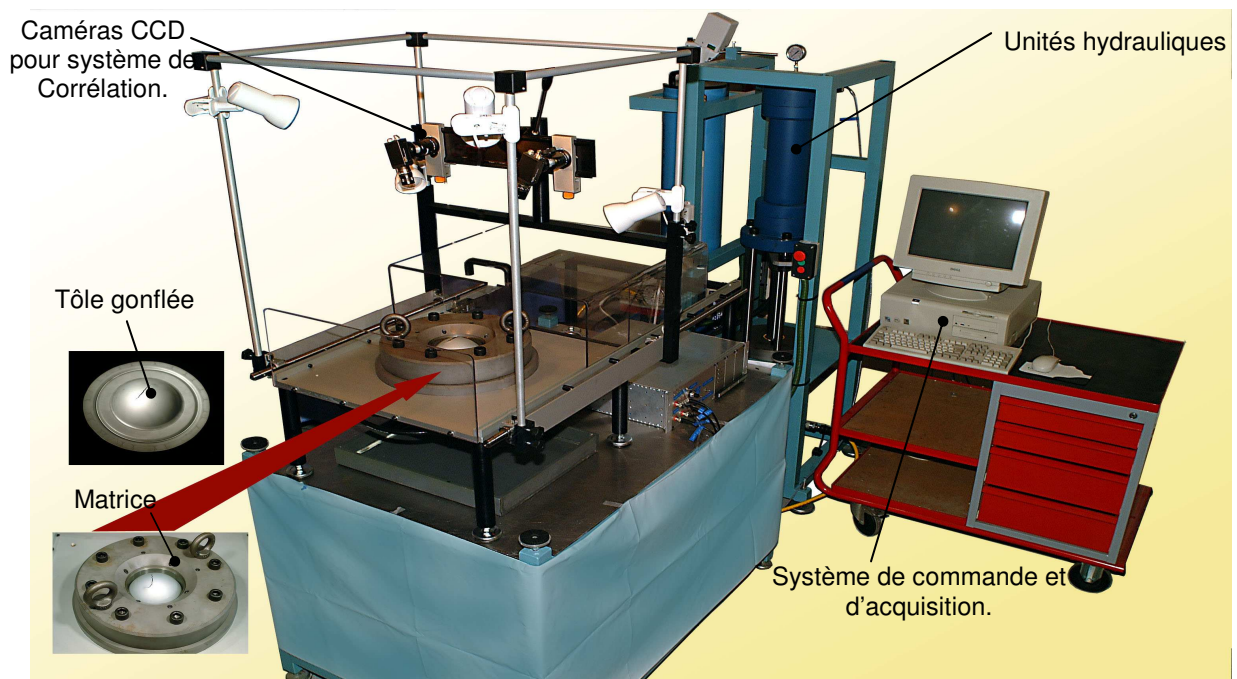


Figure 2.19: Vue d'ensemble de la machine de gonflage.

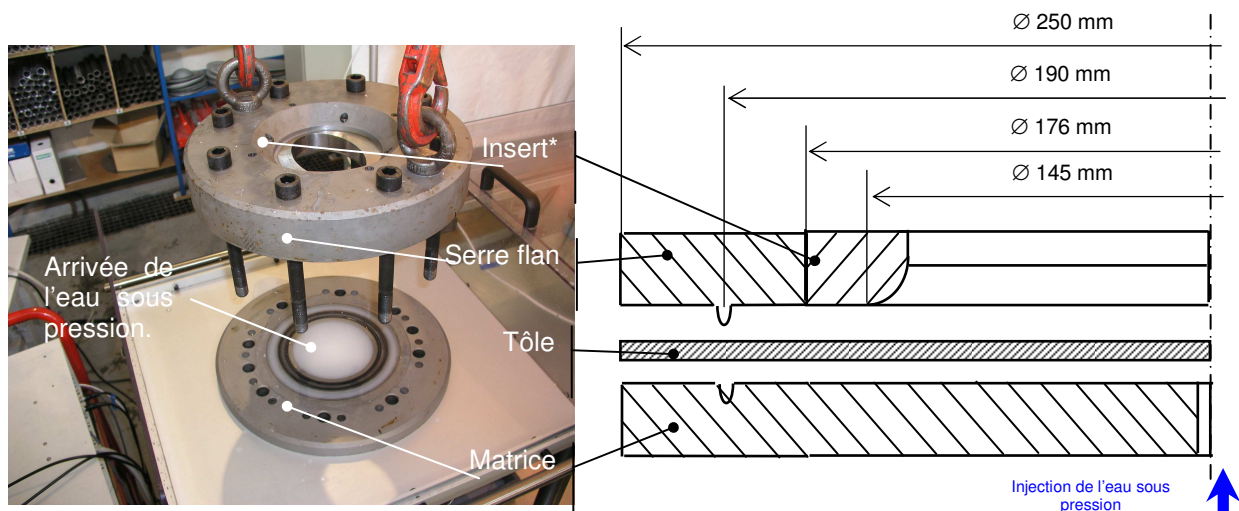


Figure 2.20: Montage de fixation de la tôle : matrice, serre-flan et insert interchangeable.

### c. Mesure du rayon de courbure

A partir de la carte de déplacement fournie par Aramis©, la définition d'une section suivant l'un des axes de la matrice permet de tracer le profil de la tôle. Sur une distance  $R$  de part et d'autre du pôle (Figure 2.21), le profil de la tôle peut être approché par un polynôme de second ordre, pour ensuite en déduire le rayon de courbure  $\rho$  selon l'équation suivante :

$$z = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{2a} \quad (2.103)$$

où  $a, b, c$  sont les paramètres du polynôme de lissage identifiés sur un voisinage  $R$ .

Le choix du voisinage sur lequel on s'est basé pour le lissage du profil doit répondre à deux exigences; d'une part il faut que ce voisinage soit suffisamment large pour pouvoir approcher le profil avec un polynôme de second ordre sans que les erreurs de mesures ne soient prépondérantes, d'autre part il ne faut pas qu'il soit trop large puisqu'on cherche à calculer un rayon de **courbure local** [Atkinson, 1997].

Le graphe de la Figure 2.22 montre l'influence de la distance de lissage sur l'évolution du rayon de courbure au cours d'un essai de gonflage. Il est à noter que cette influence se manifeste principalement en début de gonflage (déformation en épaisseur inférieure à 0.2). Au-delà, très peu d'écart est observé : typiquement, l'écart relatif moyen entre le rayon de courbure calculé avec une distance de lissage de 13.0 mm et celui calculé avec une distance de lissage de 18.2 mm est de 0.39%. Ce résultat montre que pour les grandes déformations, la technique de mesure du rayon de courbure par interpolation polynomiale est peu sensible à la dimension du voisinage d'interpolation réduisant ainsi l'erreur due à cette approximation.

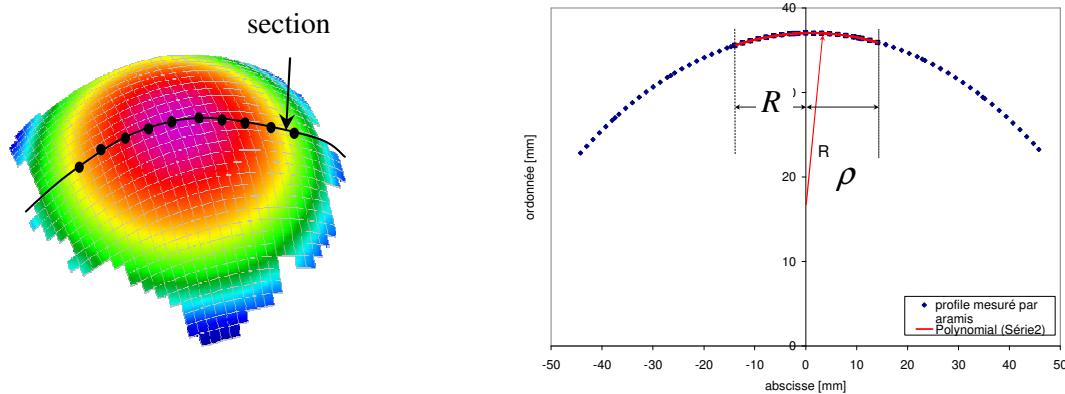


Figure 2.21: Définition de section et mesure du rayon de courbure au pôle.

Quant aux dispersions observées pour les faibles déformations, elles résultent du fait que le rayon de courbure est assez élevé ( $>100$  mm), il est donc nécessaire que la distance de voisinage soit suffisamment grande pour pouvoir saisir ce rayon et filtrer les erreurs de mesures.

Il nous semble donc que la distance de 13.0 mm est un bon compromis aussi bien pour les faibles que pour les grandes déformations, en gardant en esprit que la précision est meilleure en grandes déformations.

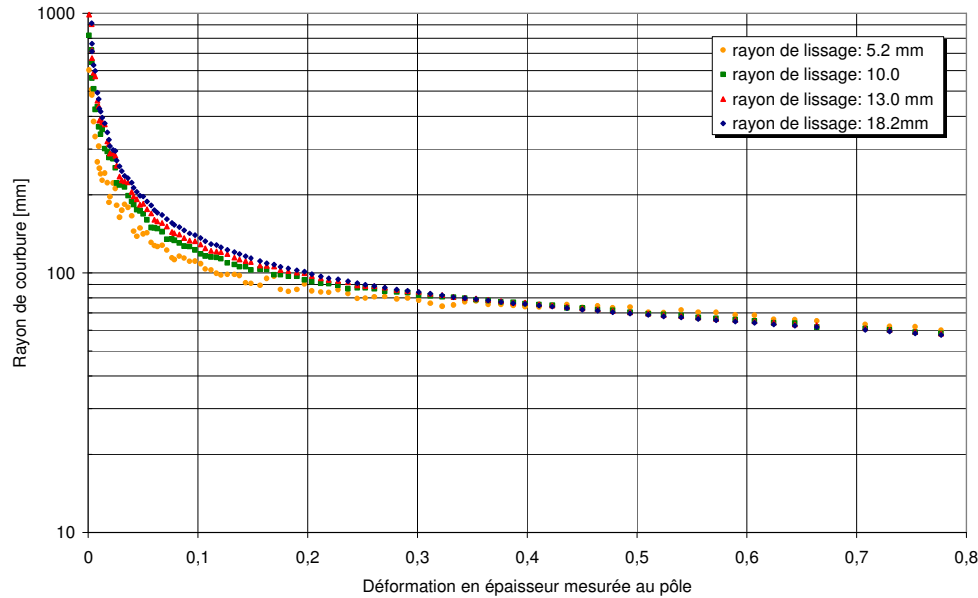


Figure 2.22 : Effet de la distance de lissage sur le calcul du rayon de courbure.

#### 2.3.3.4. Dépouillement et résultats

##### *a. Analyse de reproductibilité des essais*

Plusieurs essais ont été effectués sur chacun des matériaux de l'étude. Les résultats d'analyse ont montré une bonne reproductibilité. Un exemple de ces tests est reporté sur le graphe de la Figure 2.23 où l'on peut noter une bonne reproductibilité des essais aussi bien en terme de pression qu'en terme de rayon de courbure. Toutefois, on a pu noter quelques dispersions du rayon de courbure principalement observées en début d'essais et qui sont attribuées aux erreurs de mesures et de calcul du rayon de courbure.

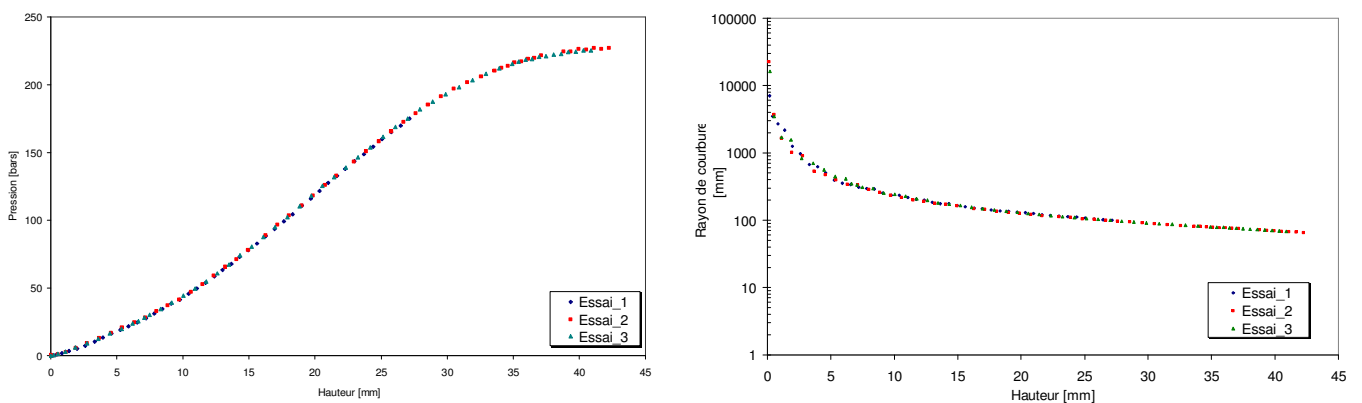


Figure 2.23 : Analyse de la reproductibilité des essais de gonflage.

En reportant sur le même graphe l'évolution du rayon de courbure pour les différents matériaux de l'étude, on peut voir (Figure 2.24) que l'évolution du rayon de courbure est globalement identique pour tous les aciers. L'aluminium présente une courbe d'évolution légèrement différente.

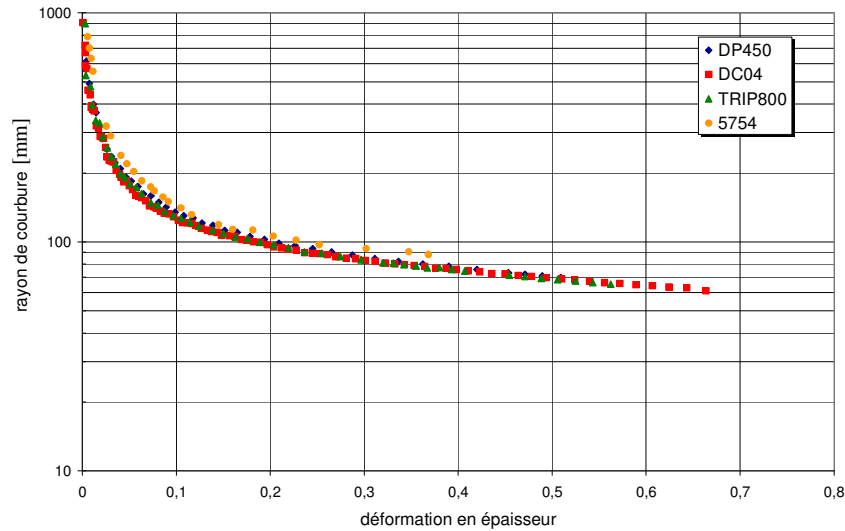


Figure 2.24: Evolution du rayon de courbure en fonction de la déformation en épaisseur pour différents matériaux.

Pour décrire l'évolution du rayon de courbure  $\rho$  en fonction de la déformation dans l'épaisseur  $\varepsilon_3$ , on considère une loi puissance :

$$\rho(\varepsilon_3) = \gamma \cdot \varepsilon_3^\lambda \quad (2.104)$$

Les paramètres de cette loi ont été identifiés pour l'acier :  $\gamma \approx 52mm$ ,  $\lambda \approx -0,392$ , et pour l'aluminium :  $\gamma \approx 43mm$ ,  $\lambda \approx -0,55$ .

D'après l'équation (2.93), et en tenant compte de la nouvelle relation entre le rayon de courbure et la déformation en épaisseur (2.104), la contrainte équivalente s'écrit alors :

$$\bar{\sigma} = \frac{\tilde{G} \cdot P \cdot \rho}{e_0 \cdot e^{-\varepsilon_3}} \quad (2.105)$$

La dérivée logarithmique de l'expression précédente conduit à :

$$\frac{\Delta \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta e_0}{e_0} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \rho}{\gamma} + \Delta \varepsilon_3 \quad (2.106)$$

L'erreur relative commise sur le calcul de la contrainte équivalente est donc le cumul des erreurs relatives de mesures de l'épaisseur initiale  $e_0$ , de mesure de la pression  $P$ , du calcul du rayon de courbure  $\rho$  et de l'erreur absolue de mesure de la déformation en épaisseur  $\varepsilon_3$ . On note aussi que la contribution de l'erreur du rayon de courbure est double. Il apparaît donc une plus grande sensibilité de la contrainte équivalente aux erreurs de mesure du rayon de courbure qu'aux autres erreurs de mesure. D'où la nécessité d'avoir des mesures de rayon de courbure qui soient les plus précises possible.



### ***b. Validation de l'hypothèse de déformation équi-biaxiale***

Nous présentons sur la Figure 2.25 l'évolution de l'état de déformation (calculé par Aramis©) pour les différents matériaux étudiés. Les mesures expérimentales reportées sur cette figure confirment bien que le chemin de déformation suivi au pôle de la tôle est très proche de la première bissectrice, et donc d'un état de déformation équi-biaxiale. L'hypothèse d'équi-biaxialité des déformations est par conséquent bien fondée.

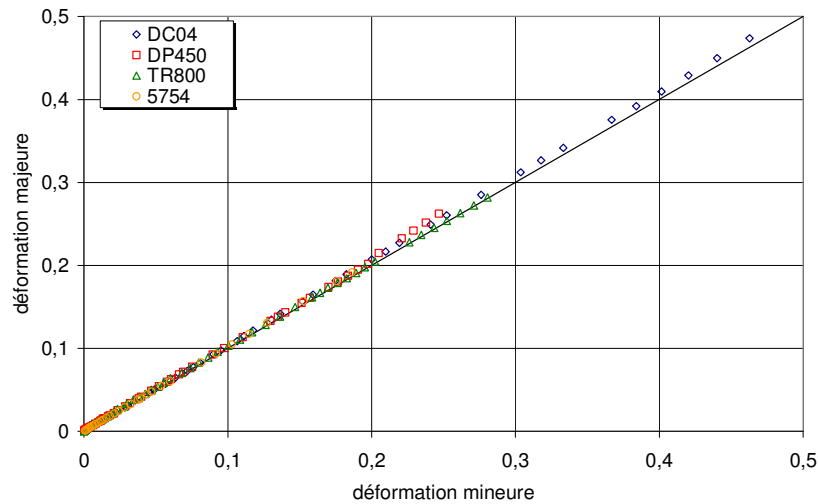


Figure 2.25: Evolution de l'état de déformation au pôle au cours d'un essai de gonflage circulaire.

#### **2.3.3.5. Identification des courbes d'écrouissage**

A présent et après avoir développé les modèles analytiques et la procédure expérimentale pour le dépouillement de l'essai de gonflage circulaire, nous présentons dans ce paragraphe les résultats des essais en terme de courbes d'écrouissage, et nous discutons de la précision du modèle de Hill48 pour décrire le comportement plastique. Il est à noter que les coefficients du critère de Hill ont été identifiés en se basant sur les coefficients de Lankford (2.27).

#### **Remarque**

Nous avons choisi d'analyser les essais de gonflage jusqu'à l'apparition du pic de pression. Au-delà, nous estimons que les effets inhérents à l'accroissement de la vitesse de déformation peuvent modifier la loi d'écrouissage du matériau.

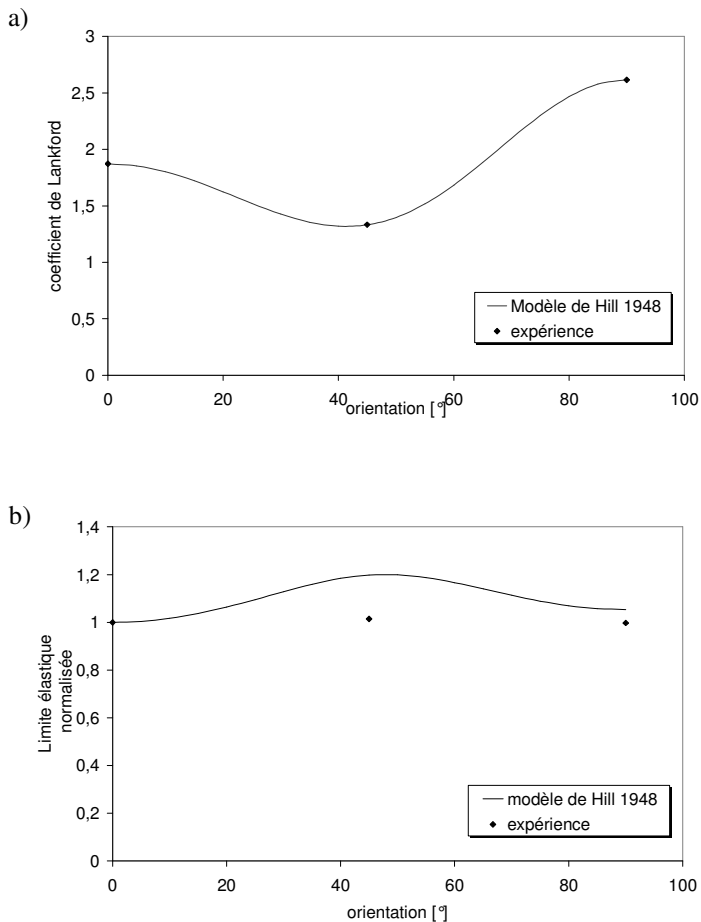
**a. Application à l'acier DC04**

Figure 2.26 : Evolution du coefficient de Lankford et de la limite élastique du DC04 en fonction de l'angle d'anisotropie.

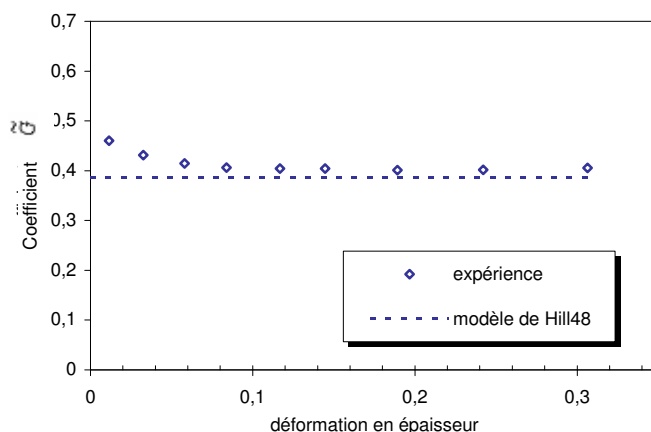


Figure 2.27 : Comparaison entre les mesures expérimentales du rapport de contrainte  $\tilde{G}$  et les prédictions du modèle de Hill48 pour le DC04.

La Figure 2.26-a montre un très bon accord entre les prédictions du critère de Hill et les mesures expérimentales de la variation du coefficient de Lankford en fonction de l'angle d'anisotropie. Ceci est, bien entendu, dû au fait que les paramètres de Hill ( $F, G, H, N$ ) ont été identifiés à partir des coefficients expérimentaux de Lankford. Par ailleurs, pour les limites élastiques (Figure 2.26-b), on note une surestimation des mesures expérimentales.

Le rapport de la contrainte de traction uniaxiale par la contrainte équi-biaxiale définie par le coefficient  $\tilde{G}$  (2.101) est reporté sur la Figure 2.27. Sur ce même graphe sont reportées également les mesures expérimentales de l'évolution de  $\tilde{G}$  en fonction de la déformation en épaisseur. Nous pouvons observer un très bon accord entre les prédictions de Hill et l'expérience, hormis en début d'essai où les écarts notés pourraient être dus aux erreurs de mesure et de calcul du rayon de courbure exposées au paragraphe (§2.3.3.3).

La courbe équivalente d'écrouissage est établie en utilisant le modèle de Hill (2.100) ; le résultat est reporté sur la Figure 2.28. Sur cette figure, on retrouve un bon accord entre la courbe d'écrouissage en traction et celle en gonflage sur la plage des déformations décrite par l'essai de traction. Dès que la courbe de traction est extrapolée, elle s'écarte de la courbe d'écrouissage en gonflage. Ces écarts se traduisent par des différences entre les paramètres d'écrouissage en gonflage et en traction (Tableau 2-5).

**Tableau 2-5:** Lois d'écrouissage du DC04 issues d'essai de gonflage circulaire et d'essai de traction.

	$\bar{\sigma} = K(\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n$		
	$K[MPa]$	$n$	$\varepsilon_0$
<b>Gonflage</b>	494	0.234	0.0002
<b>Traction</b>	527	0.262	0.0067

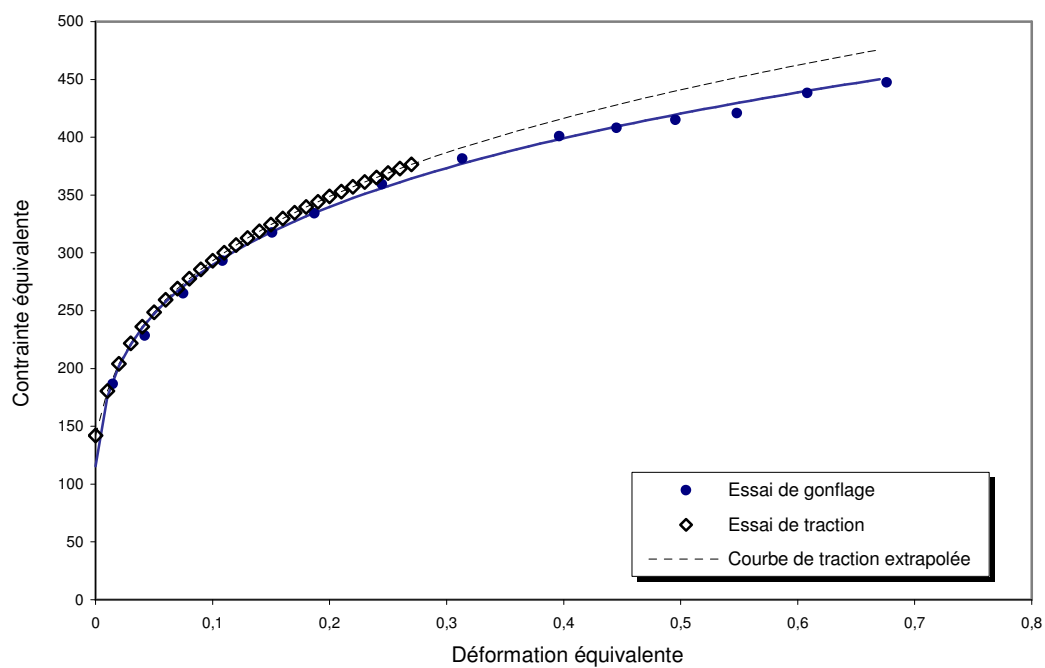
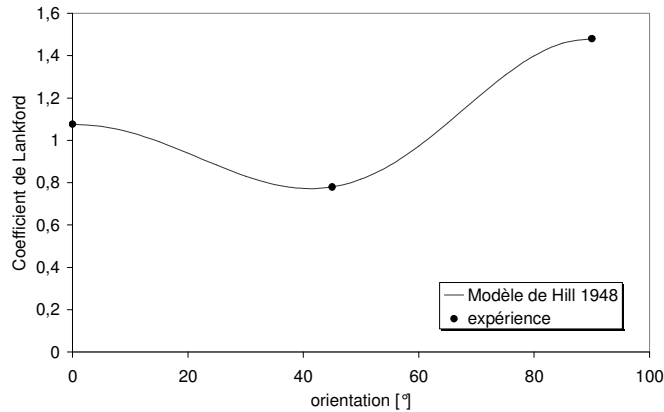


Figure 2.28 : Comparaison entre courbes d'écrouissage du DC04 en traction uni-axiale et en traction équibiaxiale.

**b. Application à l'acier DP450**

a)



b)

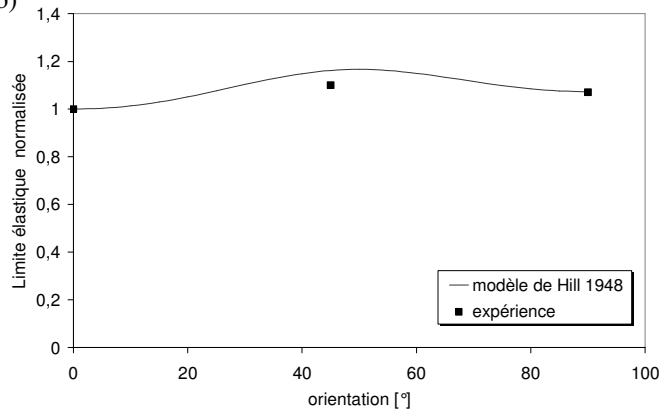


Figure 2.29 : Evolution du coefficient de Lankford et de la limite élastique du DP450 en fonction de l'angle d'anisotropie.

Pour le DP450, on note que le critère de Hill décrit assez bien les propriétés d'anisotropie du matériau (Figure 2.29).

L'évolution du coefficient  $\tilde{G}$ , reportée sur la Figure 2.30, montre les mêmes tendances que pour le DC04 ; marquées par des dispersions en début d'essai, ensuite, une très bonne concordance avec le modèle de Hill est retrouvée.

La courbe d'écroutissage en déformation équi-biaxiale et celle en traction (Figure 2.31) sont quasi confondues, et les paramètres d'écroutissage identifiés par essai de gonflage sont du même ordre de grandeur que ceux en traction (Tableau 2-6).

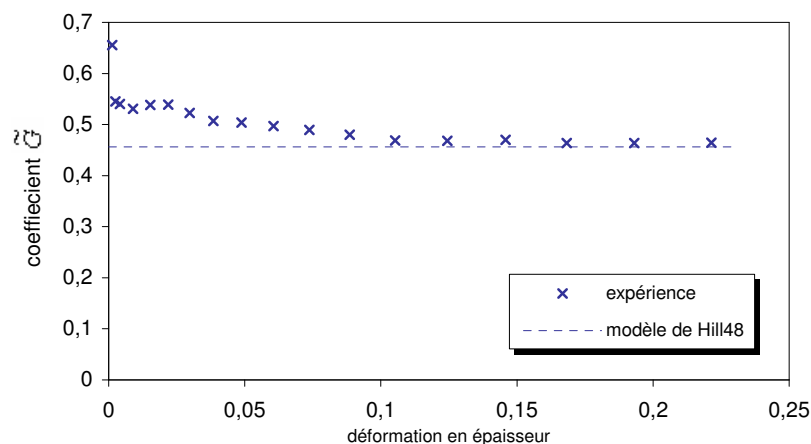


Figure 2.30 : Comparaison entre les mesures expérimentales du rapport de contrainte  $\tilde{G}$  et les prédictions du modèle de Hill48 pour le DP450.

**Tableau 2-6:** Lois d'écouissage du DP450 issues d'essai de gonflage circulaire et d'essai de traction.

	$\bar{\sigma} = K(\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n$		
	$K[MPa]$	$n$	$\varepsilon_0$
<b>Gonflage</b>	808	0.181	0.0014
<b>Traction</b>	804	0.193	0.0055

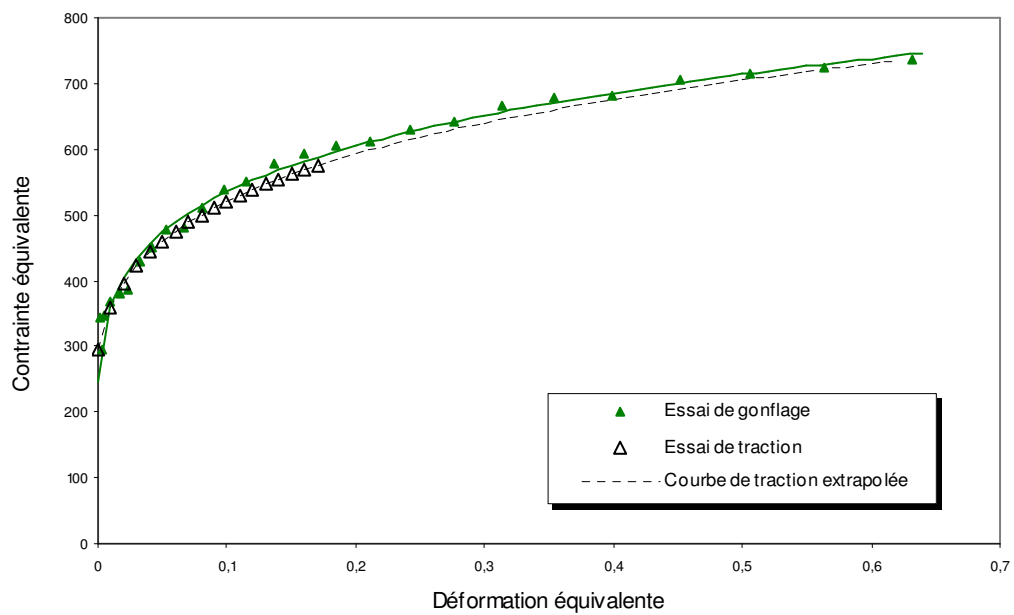


Figure 2.31 : Comparaison entre courbes d'écouissage du DP450 en traction uni-axiale et en traction équi-biaxiale.

### c. Application au TRIP800

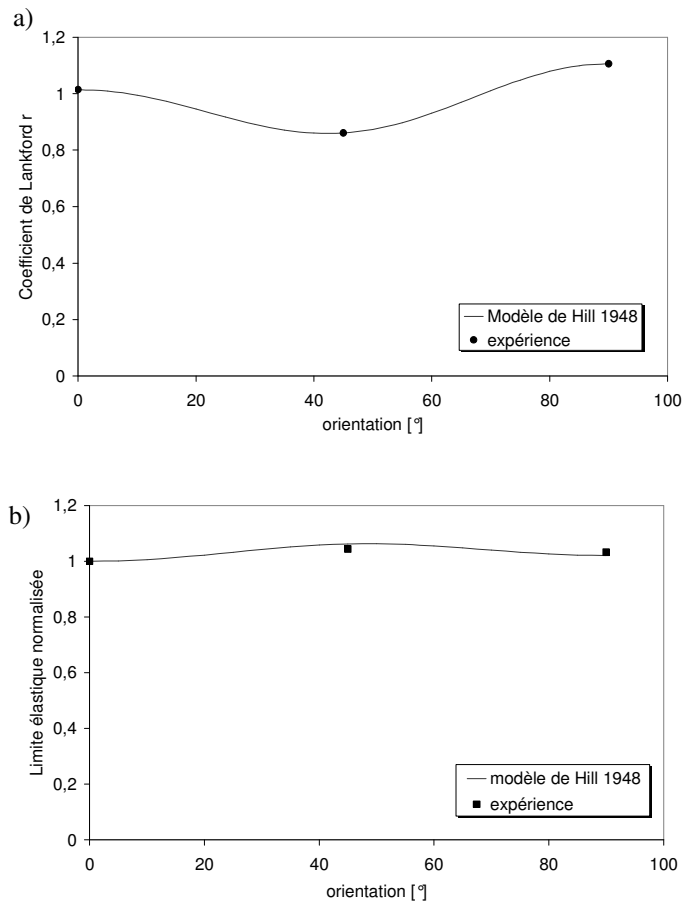


Figure 2.32: Evolution du coefficient de Lankford et de la limite élastique du TRIP800 en fonction de l'angle d'anisotropie.

Le TRIP800 présente la plus faible anisotropie aussi bien en terme de variation du coefficient de Lankford, qu'en terme de variation des limites élastiques. Ses propriétés sont très bien décrites par le modèle de Hill48 (Figure 2.32).

En déformation équi-biaxiale, l'évolution du coefficient  $\tilde{G}$  (Figure 2.33) semble montrer une tendance vers une valeur asymptotique assez proche des prédictions du modèle de Hill48. Il est donc possible de définir une courbe d'écrouissage équivalente au sens de Hill pour décrire les grandes déformations en chemin équi-biaxiale (Figure 2.34). La courbe obtenue est ensuite approchée par une loi de Krupkowski et une de loi de Voce (Figure 2.35) dont les paramètres sont indiqués dans le Tableau 2-7. Il est à noter que la loi de Voce décrit mieux l'écrouissage du TRIP800 qu'une loi de Krupkowski.

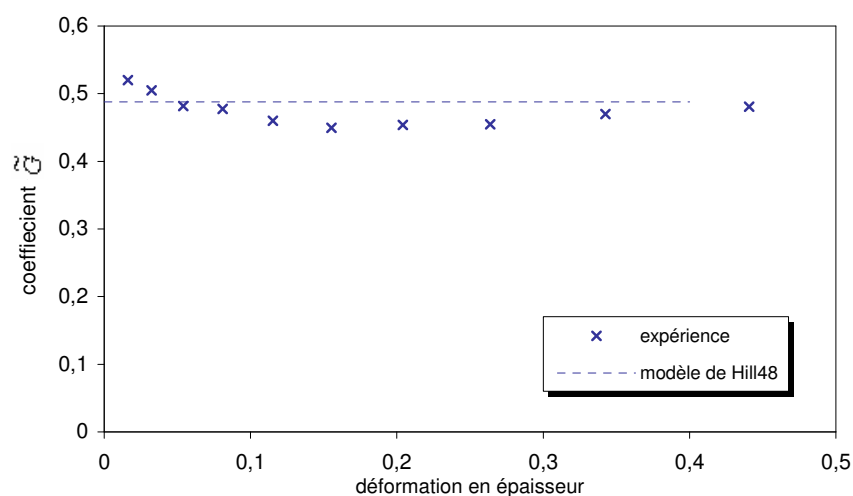


Figure 2.33 : Comparaison entre les mesures expérimentales du rapport de contrainte  $\tilde{G}$  et les prédictions du modèle de Hill48 pour le TRIP800.

**Tableau 2-7:** Lois d'écrouissage du TRIP800 issus d'un essai de gonflage circulaire.

	$\bar{\sigma} = K(\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n$			$\bar{\sigma} = \sigma_0 + \sigma_s [1 - \exp(-\bar{\varepsilon}/\varepsilon_0)]$		
	$K[MPa]$	$n$	$\varepsilon_0$	$\sigma_0$	$\sigma_s$	$\varepsilon_0$
Gonflage	1400	0.1799	0.0016	493.6	760	0.145
Traction	1471	0.2597	0.0164			

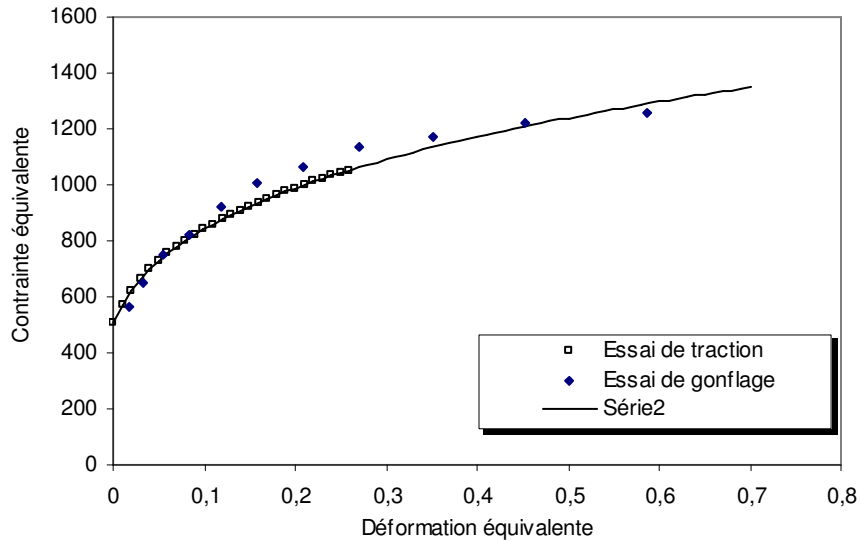


Figure 2.34 : Comparaison entre courbes d'écrouissage du TRIP800 en traction uni-axiale et en traction équi-biaxiale.

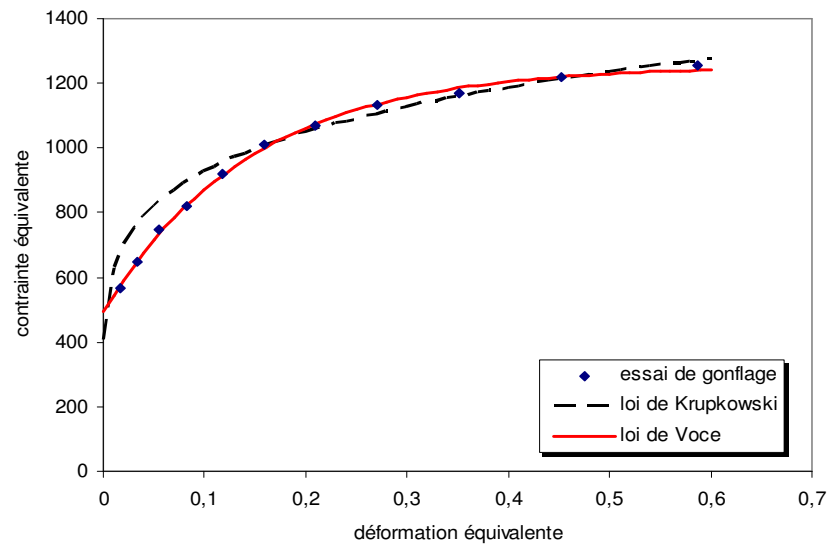


Figure 2.35 : Ajustement de la courbe d'écrouissage en gonflage du TRIP800 par des lois de type Voce et Krupkowski.

### d. Application à l'aluminium 5754

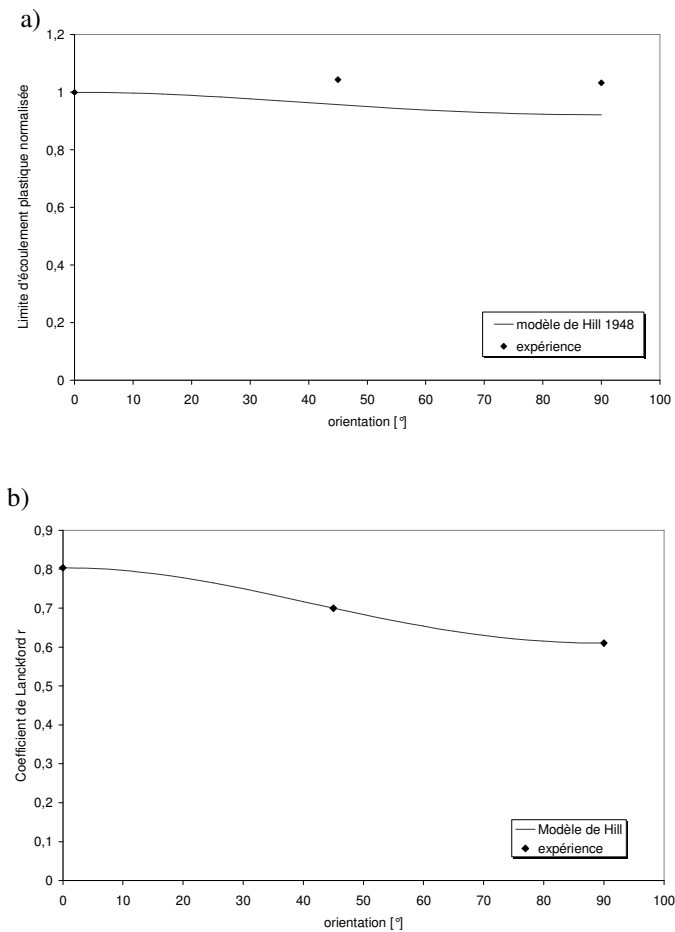


Figure 2.36 : Evolution du coefficient de Lankford et de la limite élastique du 5754 en fonction de l'angle d'anisotropie.

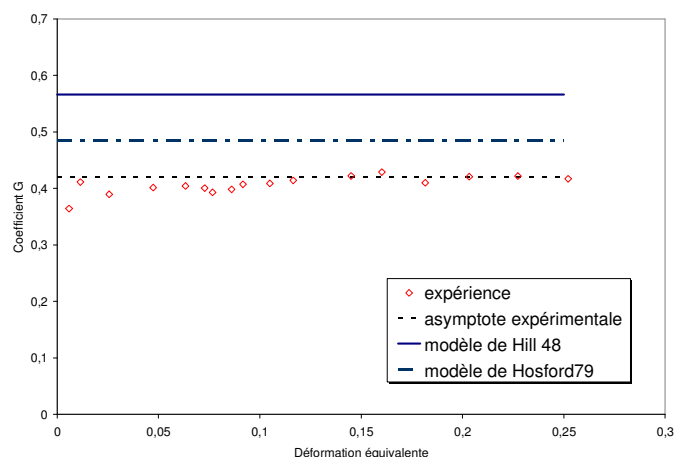


Figure 2.37 : Comparaison entre les mesures expérimentales du rapport de contrainte  $\tilde{G}$  et les prédictions du modèle de Hill48 pour le 5754.

Le comportement en déformation équi-biaxiale de certains alliages d'aluminium est connu pour être difficilement modélisé par un critère de Hill48.

Les mesures expérimentales (Figure 2.37) semblent confirmer ce comportement « anormal » pour l'aluminium 5754. Cette anomalie se manifeste par un coefficient  $\tilde{G}$  inférieur à 0.5 alors que le critère de Hill prévoit un coefficient supérieur à 0.5. Le critère non quadratique de Hosford79 montre, en revanche, une tendance plus réaliste avec un coefficient  $\tilde{G}$  inférieur à 0.5, mais il reste au dessus des mesures expérimentales. Pour déterminer la courbe d'écrouissage en gonflage, nous avons choisi d'utiliser la valeur expérimentale asymptotique du coefficient  $\tilde{G}$  (égale à 0.42).

La Figure 2.38 illustre les courbes d'écrouissage en traction et en gonflage. On remarque une légère déviation entre l'écrouissage en gonflage et la loi d'écrouissage en traction.

La courbe d'écrouissage issue de l'essai de gonflage est approchée par une loi de Voce et une loi de Krupkowski (Figure 2.39) dont les paramètres sont donnés au Tableau 2.8. On remarque que la loi de Krupkowski décrit correctement le comportement du matériau sur toute la plage des déformations, alors que la loi de Voce montre des difficultés pour les faibles déformations.



**Tableau 2.8 :** Lois d'écouissage de l'aluminium 5754 issues d'un essai de gonflage circulaire.

	$\bar{\sigma} = K(\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^n$			$\bar{\sigma} = \sigma_0 + \sigma_s [1 - \exp(-\bar{\varepsilon}/\varepsilon_0)]$		
	$K[MPa]$	$n$	$\varepsilon_0$	$\sigma_0$	$\sigma_s$	$\varepsilon_0$
<b>Gonflage</b>	407	0.2747	0.0049	148.6	226.6	0.2784
<b>Traction</b>	453	0.31	0.003			

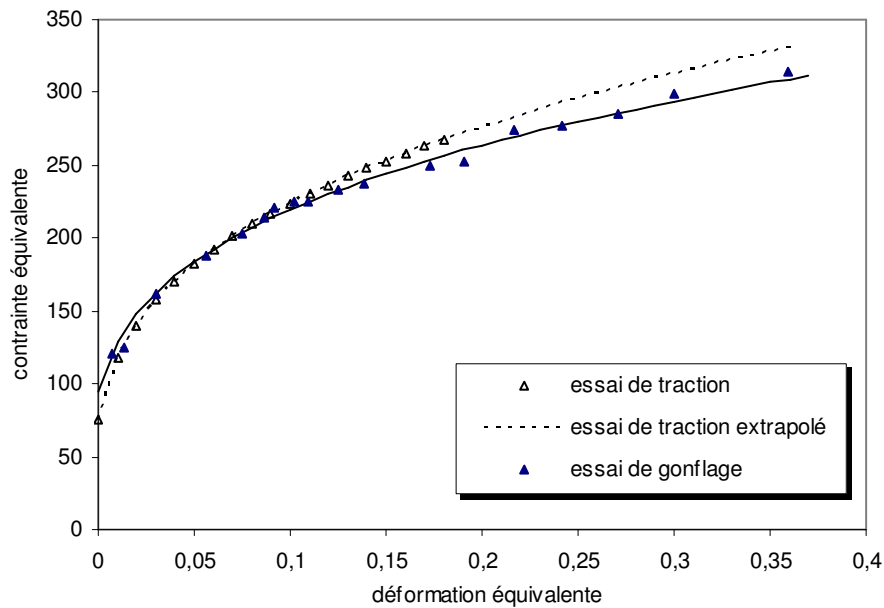


Figure 2.38 : Comparaison entre courbes d'écrouissage du 5754 en traction uni-axiale et en traction équi-biaxiale

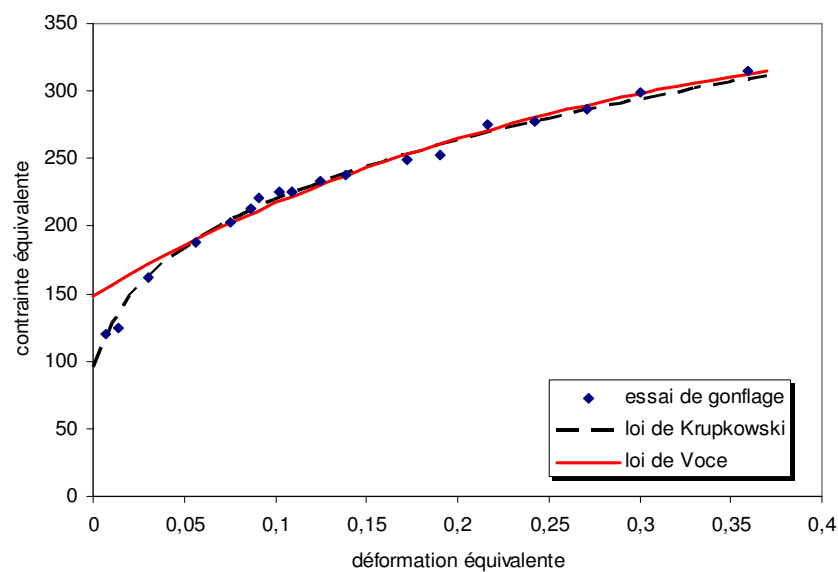


Figure 2.39 : Ajustement de la courbe d'écrouissage en gonflage du 5754 par des lois de type Voce et Krupkowski.

## 2.4. Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre la description du comportement plastique orthotrope des tôles laminées dans le cadre de la plasticité associée avec écrouissage isotrope. En première partie, nous avons mis en exergue quelques propriétés relatives à l'écoulement plastique anisotrope, et nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'étude du critère de Hill48 ainsi que de quelques autres critères de plasticité non quadratiques. Des efforts de recherche continuent encore à être déployés dans ce domaine afin de proposer de nouveaux critères suffisamment flexible pouvant à la fois décrire avec une bonne précision les coefficients de Lankford et les limites élastiques du matériau.

En deuxième partie, nous nous sommes attachés à identifier des courbes d'écrouissage en grandes déformations. En effet, partant du fait que les essais de traction sont limités par l'apparition de la striction à de faibles déformations, et afin d'éviter leurs extrapolations aux grandes déformations, nous avons étudié le test de cisaillement Miyauchi. Après mise en place des essais, l'analyse des résultats d'expériences de cisaillement sur acier doux a montré une grande différence entre les courbes équivalentes d'écrouissage en traction et celle en cisaillement. Ces différences nous ont conduit aux conclusions suivantes:

- il est indispensable de modifier le dispositif de mesure en adoptant un système de mesure de déplacement plus local.
- les simulations numériques ainsi qu'une étude bibliographique ont montré la nécessité d'introduire des coefficients correcteurs pour corriger les effets de glissement et de non homogénéité.
- d'un autre côté, nous pensons que l'effet de la rotation plastique est aussi une hypothèse importante à étudier et à intégrer dans le modèle de dépouillement de l'essai de cisaillement.

C'est au vu de ces constatations qu'il nous a semblé préférable d'orienter nos efforts vers un autre essai capable de répondre à notre besoin de caractérisation en grandes déformations sans avoir à apporter de corrections. Nous avons à cet effet choisi l'essai de gonflage circulaire. Une machine utilisant un système de mesure de déformation en continu par corrélation d'images a été mise en place et une procédure originale pour la mesure du rayon de courbure a été ainsi utilisée. Une étude théorique sur la base d'un critère de Hill48 nous a conduit à adopter une condition de déformation équi-biaxiale pour le dépouillement des essais. Enfin, trois nuances d'acier et un alliage d'aluminium ont fait l'objet d'essais de gonflage et on a pu ainsi déterminer leurs courbes d'écrouissage.

Après la caractérisation comportementale des matériaux, on s'intéressera au chapitre suivant à établir leurs limites de formabilité à travers l'étude de la striction.

## Références

- Aliaga, C. (2000), *Simulation par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'acier : application à la trempe de pièces forgées ou coulées*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.
- Atkinson, M. (1997), *Accurate determination of biaxial stress-strain relationships from hydraulic bulging tests of sheet metals*, Int. J. Mech. Sci. Vol. 39, No. 7, pp. 761-769.
- Bacroix, B.; Genevois, P.; Teodosiu, C. (1994), *Plastic anisotropy in low carbon steels subjected to simple shear with strain path change.*, Eur. J. Mech., A/solids, 13, n°5, 661-675, 1994.
- Barlat, F. (2004), *Linear transformation-based anisotropic yield functions*. International Journal of plasticity (article in press).
- Blazy, J-S. (2003), *Comportement mécanique des mousses d'aluminium : caractérisations expérimentales sous sollicitations complexes et simulations numériques dans le cadre de l'élasto-plasticité compressible*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, France.
- Conrad, H. (1961), J. Iron Steel Inst, vol. 198, p. 364.
- Dafalias, Y.F. (2000), *Orientational evolution of plastic orthotropy in sheet metals*. Journal of the Mechanics and physics of solids 48 (2000), pp. 2231-2255.
- Genevois, P. (1992), *Etude expérimentale et modélisation du comportement plastique anisotrope de tôles d'acier en grandes transformations*. Thèse de doctorat, Institut Polytechnique de Grenoble, France.
- Ghosh, A.K. (1974), *Strain localization in the diffuse neck in sheet metal*. Metallurgical Transactions vol. 5, July, pp. 1607-1616.
- Habraken, A.M. (2004), *Modelling the plastic anisotropy of metals*. Archives of computational method in Engineering 2004 vol II, ISS1, pp. 3-96.
- Hein, P.; Vollertsen, F. (1999), *Hydroforming of sheet metal pairs*. J. Mat. Proc. Tech.87 , (1999), pp. 154-164.
- Hill, R. (2000), *Plastic anisotropy and the geometry of the yield surfaces in stress space*. J. Mech. Phys. Solids 48, pp.1093-1106 (2000).
- Hill, R.; Storakers, B. (1980), *Plasticity and creep of pressurized membranes: a new look at the small-deflection theory*. J. Mech. Phys. Solids 28, 27-48 (1980).
- Hill, R. (1950), *A theory of the plastic bulging of a metal diaphragm by lateral pressure*. Phil. Mag. 7, pp. 1133-1142.
- Hora, P.; Feurer, U.; Wahlen, A.; Reissner, J. (2000), *Methods for handling of FEM input and output data with the goal of higher computational reliability*. European congress on

computational methods in applied sciences and engineering, Barcelona, 11-14 september 2000.

Hosford, W.F. (1979), *On yield loci of anisotropic cubic metals*. Proceedings of the seventh North American metalworking research conference. Dearborn: SME; 1979, pp. 191-197.

Kim, K.H.; Yin, J.J (1997), *Evolution of anisotropy under plane stress*. Journal of the Mechanics and Physics of solids 45, pp. 841-851.

Kleemola, H.J.; Ranta-Eskola R. (1976), *On the determination of biaxial stress-strain curves and forming limit diagrams by hydraulic bulging*, Scandinavian Journal of Metallurgy 5, pp. 124-128 (1976).

Knockaert, R. (2001), *Etude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Koss, S. (1994), *Ecroutissage isotrope et anisotrope des aciers laminés soumis à des grandes déformations*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble-France.

Kuroda, M.; Tvergaard, V. (2000), *Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria*, International Journal of Solids and Structures vol.37 (2000), pp. 5037-5059.

Li, Y.; Cima, M.J. (2004), *Bulge test on free standing gold thin films*. 2003 MRS Fall Meeting; Boston, MA; USA; 1-5 Dec. 2003, pp. 437-442.

Mandel, J. (1971), *Plasticité classique et viscoplasticité*, International Centre for Mechanical Sciences, courses and lectures N°97 springer-verlag (1971).

Mitra, S. K.; Dorn, J.E. (1963), Trans. TMS-AIME, vol. 227, p.1015.

Miyauchi, K. (1984), *Stress strain relationship in simple shear of in-plane deformation for various steel sheets*. In Efficiency in sheet Metal Forming, Proc. Of the 13<sup>th</sup> Biennial Congress, pp360-371. IDDRG, 1984.

Novotny, S. ; Hein, P. (2001), *Hydroforming of sheet metal pairs from aluminium alloys*. J. Mat. Proc. Tech. 115, (2001) pp. 65-69.

Paviot, V. M.; Vlassak, J.J.; Nix, W.D. (1995), *Measuring the mechanical properties of thin metal films by means of bulge testing of micromachined windows*. Thin Films: Stresses and Mechanical Properties V; Boston, MA; USA; 28 Nov.-2 Dec. 1994. pp. 579-584.

Pijlman, H. (2001), *Sheet material characterisation by multi-axial experiments*. Thèse de doctorat, université de Twente, Hollande.

Priadi, D. (1993), *Etude expérimentale et théorique des lois de comportement et de la striction de tôles d'acier pour la simulation de l'emboutissage*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, France.

Rauch, E.F. (1998), *Plastic anisotropy of sheet metals determined by simple shear tests*. Material science and engineering A241 (1998), pp. 179-183.

Rees, D.W.A. (1994), *Equivalence and instability correlations for isotropic and anisotropic sheet plasticity*, J. Mat. Proc. Tech. 40, pp. 173-194.

Rees, D.W.A. (1995), *Instability limits to the forming of sheet metals*. J. Mat. Proc. Tech. 55 pp. 146-153.

Rees, D.W.A. (1999), *Pole instability theory for ellipsoidal bulging of rolled sheet*. J. Mat. Proc. Tech. vol. 92-93 (1999), pp. 508-517.

Rusinek, A.; Klepaczko, J.R. (2001), *Shear testing of a sheet at wide range of strain rates and a constitutive relation with strain-rate and temperature dependence of the flow stress*. International Journal of Plasticity 17 (2001), pp. 87-115.

Semiatin, L.; Jonas, J.J. (1983), *Formability & workability of metals, plastic instability & flow localization*. American Society for Metals, ISBN 0-87170-183-9, p.178.

Shang, H.M.; Chau, F.S.; Tay, C.J.; Toh, S.L. (1984), *Assessment of behavior of sheet metal during hydroforming efficiency in sheet metal forming*. 13<sup>th</sup> Biennial Congress, Melbourne, Feb1 106-117.

Shang, H.M.; Qin, S.; Tay, C.J. (1997), *Hydroforming sheet metal with intermittent changes in the draw-in condition of the flange*. J. Mat. Proc. Tech.63 (1997) 72-76.

Sigvant, M. (2003), *The hemming process: A numerical and experimental study*. Thèse de doctorat, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden.

Storakers, B. (1983), *Finite plastic deformation of a circular membrane under hydrostatic pressure*. Int. J. Mech. Sci; 8, pp. 619-628 (1983).

Tugcu, P. (1-1999), *Finite strain analysis of simple shear using recent anisotropic yield criteria pressure*. International Journal of Plasticity 15 (1999) pp. 939-962.

Vreede, P. (1992), *A finite element method for simulations of 3-dimensional sheet metal forming*. Thèse de doctorat, université de Twente, Hollande.

Wang, N.M.; Shammany, M.R. (1969), *On the plastic bulging of a circular diaphragm by hydrostatic pressure*. J. Mech. Phys. Solids 17 pp. 43-59.

Woodthorpe, J.; Pearce, R. (1970), *The anomalous behavior of aluminum sheet under balanced biaxial tension*. International Journal of Mechanical Sciences, 1970)vol.20, pp. 5.

Zheng-Xue, T.; Lin, Y. (2003), *Characterization of mechanical properties of thin polymer films using a bi-axial tension based on blow-up test*. Plastics, Rubber and composites, vol. 32 No. 10, p. 459.

[1] <http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/physique/Tp-phys/Prem/optique1/Spherometre.pdf>.

[2] Manuel d'utilisation du système Aramis V.4.7 commercialisé par GOM mbH .



# Chapitre 3

## Etude de la formabilité et modélisation de la striction

<b>Chapitre 3 .....</b>	<b>- 73 -</b>
3.1. Introduction : la striction en mise en forme des tôles .....	- 75 -
3.2. Détermination expérimentale des CLF .....	- 76 -
3.2.1. Les tests utilisés pour la détermination des CLF .....	- 77 -
3.2.1.1. Test Marciniak .....	- 77 -
3.2.1.2. Test Nakazima .....	- 77 -
3.2.1.3. Test avec éprouvettes entaillées .....	- 77 -
3.2.1.4. Test de gonflage hydraulique .....	- 78 -
3.2.2. Système de mesure des déformations .....	- 78 -
3.2.3. Définition de la limite de formabilité .....	- 78 -
3.2.4. Détermination expérimentale des Courbes Limites de Formage par des essais de gonflage .....	- 79 -
3.2.4.1. Procédure expérimentale .....	- 79 -
3.2.4.2. Résultats .....	- 81 -
3.3. Critères analytiques d'apparition de la striction .....	- 84 -
3.3.1. Critères d'instabilité plastique .....	- 84 -
3.3.1.1. Critère de Considère .....	- 84 -
3.3.1.2. Critère de Swift .....	- 85 -
3.3.1.3. Critère de Hill .....	- 87 -
3.3.1.4. Critère de Ramaekers .....	- 88 -
3.3.1.5. Critère de Force Maximum Modifié .....	- 90 -
3.3.2. Modèle de Marciniak et Kuczynski (M-K) .....	- 90 -
3.3.3. Méthode de Perturbation .....	- 94 -
3.3.4. Analyse de bifurcation .....	- 97 -
3.3.5. Synthèse .....	- 101 -
3.4. Analyse de l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation .....	- 105 -
3.4.1. Analyse de Hart .....	- 105 -
3.4.1.1. Epreuve à section homogène .....	- 105 -
3.4.1.2. Evolution d'un défaut .....	- 107 -
3.4.2. Méthode du défaut initial .....	- 110 -
3.4.3. Approche de Ghosh .....	- 111 -
3.4.4. Synthèse .....	- 112 -
3.5. Etude du Critère de Force Maximum Modifié (CFMM) .....	- 113 -
3.5.1. Définition du critère .....	- 113 -
3.5.1.1. Expression du modèle pour un critère de von Mises .....	- 116 -
3.5.1.2. Expression du CFMM pour un critère de Hill48 .....	- 116 -



3.5.1.3. Expression du CFMM pour un critère de Hosford(1979).....	- 117 -
3.5.2. Interprétation graphique du CFMM pour un matériau sans sensibilité à la vitesse de déformation- 117 -	
3.5.3. Effet du critère de plasticité.....	- 118 -
3.5.3.1. Modèle M-K .....	- 118 -
3.5.3.2. CFMM.....	- 120 -
3.5.4. Effet du chemin de déformation .....	- 122 -
3.5.5. Etude de l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation .....	- 128 -
3.5.5.1. Influence du terme au numérateur ( $m \hat{g} / g$ ) .....	- 130 -
3.5.5.2. Influence du terme au dénominateur : $m \ddot{\epsilon}_1 / \dot{\epsilon}_1^2$ .....	- 132 -
3.6. Application du CFMM et comparaison avec les CLF expérimentales.....	- 134 -
3.7. Conclusion .....	- 138 -
Références .....	- 139 -

### 3.1. Introduction : la striction en mise en forme des tôles

Pendant la phase de conception d'une pièce, il est nécessaire de s'assurer de sa faisabilité par le procédé envisagé (emboutissage, hydroformage,...), mais aussi de s'assurer que la pièce ne présentera pas de défaut après production (Figure 3.1).

Si la simulation numérique par la méthode des éléments finis est devenue un outil incontournable dans la phase de conception et a pu apporter des réponses à la question de faisabilité, dans de nombreux cas cet outil à lui seul reste, néanmoins, insuffisant pour satisfaire les critères d'acceptabilité de la pièce.

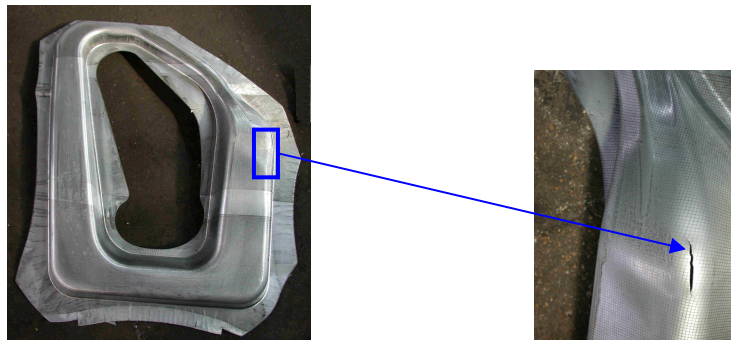


Figure 3.1 : Exemple de défaut de rupture.

Bien avant la généralisation de l'outil numérique dans les années 80, le besoin de comprendre et d'évaluer la limite de formabilité d'un matériau s'est déjà fait sentir dans le monde des emboutisseurs. C'est ainsi que divers tests ont été utilisés pour définir la limite de formabilité d'un matériau. Citons l'exemple du test d'emboutissage profond conduisant à la définition d'un paramètre appelé Rapport Limite d'Emboutissabilité et qui permet d'évaluer quantitativement la formabilité d'une tôle pour le procédé d'emboutissage.

C'est seulement en 1976 que Keeler [Keeler, 1976] a introduit pour la première fois, la notion de Courbe Limite de Formage (CLF). Dans l'espace des déformations principales<sup>7</sup>, Keeler a ainsi remarqué qu'à chaque chemin de déformation correspond un point limite qui marque l'apparition de la striction pour celui-ci. En joignant l'ensemble de ces points, il définit ainsi la Courbe Limite de Formage (CLF) qui n'est autre qu'une frontière séparant deux domaines: le domaine en dessous de la courbe correspond à des modes de déformation sans défauts, et le domaine au dessus présente des risques de striction et de rupture (Figure 3.2).

Ainsi définie, la CLF est une signature propre au matériau qui indique sa capacité à se déformer sans rupture. De ce fait, la CLF peut être exploitable de plus d'une manière :

- D'abord elle permet de classer les tôles de différentes nuances selon leur formabilité : plus le niveau de la CLF est élevé, meilleure est la formabilité de la nuance.
- En portant sur le diagramme des déformations principales l'ensemble des points calculés à partir d'une simulation numérique de la mise en forme d'une pièce, il est possible de détecter les zones

---

<sup>7</sup> Dans la suite du manuscrit, on adoptera le vocable « déformation majeure » pour définir la plus grande déformation principale ( $\epsilon_1$ ), et « déformation mineure » pour la plus petite déformation principale ( $\epsilon_2$ ) calculées dans le plan tangent.

critiques. Il suffit de considérer les points les plus proches de la CLF. A cet endroit, il y a risque de striction. Pour y remédier, plusieurs solutions sont alors envisageables :

- § soit une tôle plus épaisse est utilisée, ce qui augmente le domaine admissible sous la CLF. En effet, les effets stabilisateur de l'épaisseur sont, d'un point de vue expérimental, bien validés. En revanche, la question de l'interprétation théorique reste à ce jour ouverte [Fromentin, 1998]..,
- § soit le matériau est échangé par un deuxième ayant une CLF plus élevée,
- § soit on modifie les paramètres du procédé (effort sur serre-flan, jonc de retenu, géométrie du flan, cycle de chargement...) de façon à faire baisser les niveaux de déformation ou les déplacer, et ainsi s'éloigner de la zone critique.

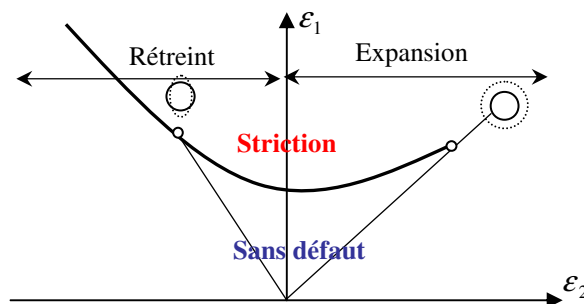


Figure 3.2: Définition d'une Courbe Limite de Formage.

Après leur introduction, les CLF ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche aussi bien industriels qu'académiques. Ces travaux concernent principalement leur détermination expérimentale et théorique d'une part, et leur modélisation analytique et l'étude de l'influence des divers paramètres matériau d'autre part. La modélisation analytique des CLF est d'autant plus intéressante qu'elle permet des gains en temps et en coût quand on estime à une semaine la durée nécessaire pour établir une CLF expérimentale.

Ce chapitre comportera une première partie consacrée à la détermination expérimentale des courbes limites de formage par essais de gonflage. Ensuite, une deuxième partie sera consacrée à passer en revue les divers critères et méthodes utilisés dans la prédiction analytique des CLF. Parmi ces critères, on s'intéressera en particulier à l'étude détaillée du Critère de Force Maximum Modifié (CFMM). Enfin, les résultats de prédiction de ce modèle seront comparés aux mesures expérimentales.

### 3.2. Détermination expérimentale des CLF

La courbe limite de formage définit la **limite de formabilité** d'un matériau pour un **ensemble fini de chemins de déformation linéaires**. Ceci suppose donc la définition des trois actions suivantes :

- définir un moyen technique pour faire varier le chemin de déformation (type de test) tout en veillant à ce que les chemins suivis soient linéaires,
- définir un système de mesure de déformation,
- préciser une définition de la limite de formabilité.

### 3.2.1. Les tests utilisés pour la détermination des CLF

Il existe dans la pratique de nombreux tests permettant d'établir une courbe limite de formage. D'une manière globale, le chemin de déformation que suit une éprouvette au cours du chargement est dicté par la géométrie de cette dernière ou bien par la géométrie de l'outillage utilisé. Ainsi, en faisant varier les rapports géométriques de l'éprouvette (ou des outillages), il est possible de balayer l'ensemble des chemins couvrant aussi bien le domaine de rétreint que le domaine d'expansion (Figure 3.2).

#### 3.2.1.1. Test Marciniak

Le test de Marciniak [Marciniak, 1973] est un test d'emboutissage utilisant un poinçon à fond plat (Figure 3.3-a). La Figure 3.3-b illustre trois géométries d'éprouvettes utilisées par ce test. L'éprouvette à gauche sur la photo correspond à un état de déformation en rétreint, celle du milieu correspond à un état de déformation plane et la troisième permet des modes de déformation en expansion.

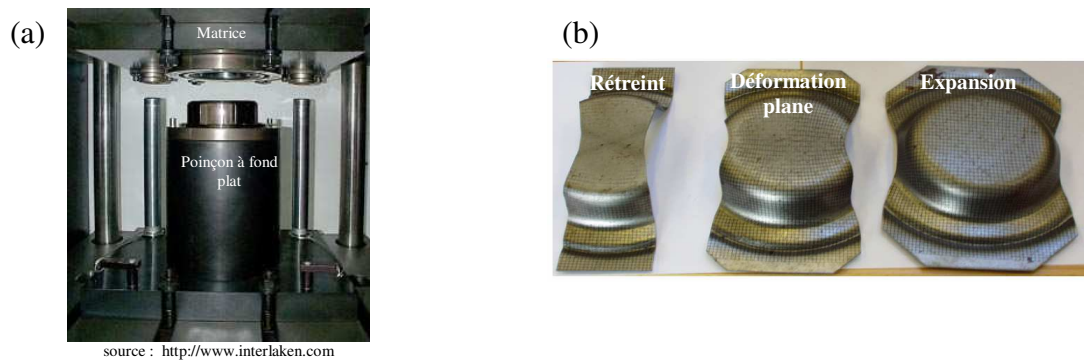


Figure 3.3 : Test Marciniak : (a) géométrie du poinçon.  
(b) géométrie des éprouvettes [Risoe, 2003].

#### 3.2.1.2. Test Nakazima

Le test Nakazima est un test d'emboutissage utilisant un poinçon à fond sphérique. Notons que les conditions de frottement entre poinçon et tôle peuvent avoir une influence non négligeable sur la linéarité du chemin.

#### 3.2.1.3. Test avec éprouvettes entaillées

En modifiant le rayon de l'entaille et la largeur de l'éprouvette, il est possible de faire varier le chemin de déformation au centre l'éprouvette et de couvrir le domaine d'expansion et de rétreint (Figure 3.4).

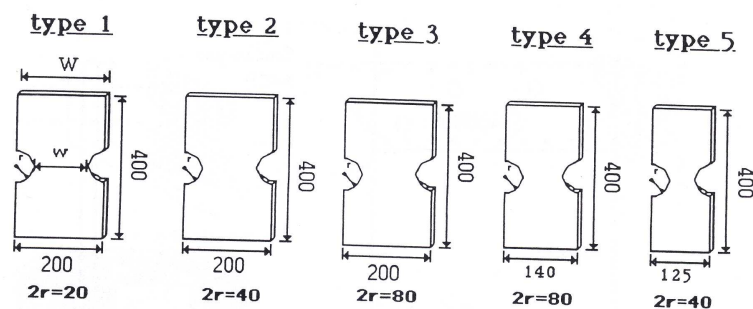


Figure 3.4 : Test avec éprouvettes entaillées [Priadi, 1993].

#### ***3.2.1.4. Test de gonflage hydraulique***

Appelé aussi test Jovignot, ce test consiste à déformer des flans sous l'action d'une pression hydraulique à travers des matrices circulaire et elliptiques, pour différents rapports de grand axe par petit axe. Plus ce rapport est grand, plus le chemin de déformation se rapproche d'un état de déformation plane. Inversement, plus ce rapport tend vers 1 et plus le chemin tend vers un état de déformation équi-biaxiale.

A la différence des deux tests Marciniak et Nakazima, le test de gonflage ne fait pas appel à un poinçon, il permet ainsi d'éliminer les effets de frottement. Toutefois, comme les éprouvettes en gonflage sont bloquées sur les quatre côtés, ces essais couvrent uniquement le domaine d'expansion, et ne permettent pas la description des modes en rétreint (Figure 3.2).

#### ***3.2.2. Système de mesure des déformations***

Les premières techniques utilisées pour mesurer le champ de déformation local consistaient à appliquer une grille avec un motif circulaire (ou carré) et de mesurer, après déformation, la distorsion et la dilatation de chacune des mailles de la grille pour en déduire le champ de déformation local.

Ces dernières années, les systèmes de mesure de déformation par corrélation d'images ont connu un important développement, et tout naturellement, ils sont exploités dans la détermination des Courbes Limites de Formage. Ainsi, nous avons utilisé pour nos essais le système de corrélation d'image Aramis©.

#### ***3.2.3. Définition de la limite de formabilité***

Les Courbes Limites de Formage définissent la limite de formabilité du matériau au moment de l'apparition d'une striction localisée. Les difficultés inhérentes à ces courbes résident dans la détection précise de l'instant de l'apparition de cette striction et dans la définition d'une déformation représentative de cette striction (déformation majeure, déformation mineure). On trouve dans la littérature diverses méthodes qui ont été développées pour la détermination des déformations à la striction.

Veerman et al [Veerman et al, 1971] ont utilisé une méthode de dépouillement basée sur le calcul de la déformation d'une grille circulaire imprimée. En suivant l'évolution de la déformation d'une maille circulaire en fonction de la déformation moyenne des mailles adjacentes, les auteurs arrivent ainsi à détecter l'apparition d'un gradient de déformation au niveau de la maille en question. Ils considèrent ensuite que l'apparition de ce gradient correspond à l'apparition de la striction localisée. Cependant, l'inconvénient de cette méthode réside dans la nécessité d'essais assez lents pour pouvoir détecter à temps l'apparition de la striction.

En utilisant une technique de dépouillement de grille, Hecker [Hecker, 1972] a proposé une autre méthode pour définir les CLF. La méthode consiste à porter sur le diagramme des déformations principales ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ) les points mesurés au niveau de la striction, et les points ne présentant aucun défaut mais qui sont très proches de la striction ou juste avant l'apparition de celle-ci. La courbe qui sépare les deux nuages de points correspond alors à la courbe limite de formage (Figure 3.5). Notons

ici, que pour garantir une bonne précision, il est nécessaire que les points sans défaut soient mesurés au voisinage immédiat de la striction.

En utilisant les mesures de déformation sur des éprouvettes rompues, la technique proposée par Bragard et al [Bragard et al, 1972] consiste à approcher par une régression polynomiale le profil des déformations selon une section perpendiculaire à la rupture. Le maximum de déformation indiqué par la régression correspond à la déformation à striction. Notons que la régression est faite sur le profil des déformations après élimination des valeurs aberrantes correspondant à la rupture.

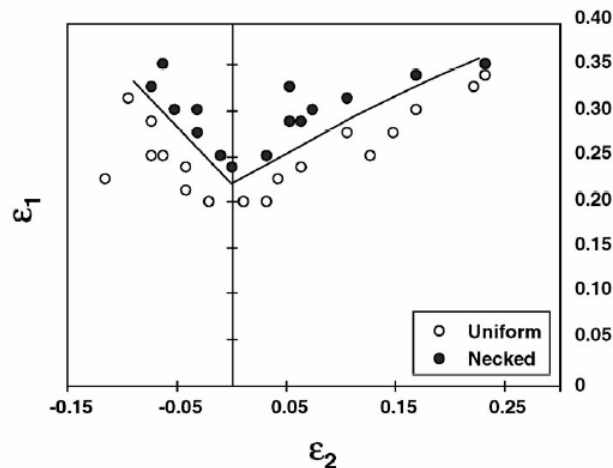


Figure 3.5 : Définition de la CLF à striction d'après Hecker [Friedman et al, 2000].

### 3.2.4. Détermination expérimentale des Courbes Limites de Formage par des essais de gonflage

Après avoir exposé quelques-unes des techniques utilisées pour la détermination expérimentale des CLF, on présente dans ce qui suit les travaux que nous avons menés pour la détermination expérimentale des CLF par des essais de gonflage elliptique.

Notre choix d'utiliser les essais de gonflage est motivé, en particulier, par la correspondance entre les conditions opératoires de ce test et celle du procédé d'hydroformage (condition de pression imposée). Par ailleurs, rappelons qu'étant donnée la limitation de ce test au seul domaine d'expansion, nos résultats seront complétés par des mesures de formabilité en rétreint effectuées grâce à des tests de type Marciniak et Nakazima fournis par les partenaires du projet 3D-structures : RISOE, ALCAN et CRF (FIAT).

#### 3.2.4.1. Procédure expérimentale

Des disques circulaires de diamètre 250mm sont découpés à partir de tôles. Une fois le motif aléatoire appliqué, les tôles sont ensuite gonflées à travers deux matrices elliptiques et une matrice circulaire. Sur la Figure 3.6 sont représentées trois éprouvettes marquées à la peinture et gonflées jusqu'à la rupture. Le rapport grand axe/petit axe de la petite matrice N°2 est de 3, celui de la matrice N°1 est de 1.5.

Un débit constant de  $2\text{cm}^3/\text{s}$  pour la matrice circulaire et la matrice elliptique N°1 a été appliqué alors qu'un débit de  $1\text{cm}^3/\text{s}$  a été appliqué pour la petite ellipse. La réduction du débit pour les essais en matrice elliptique N°2 assure des vitesses de déformation du même ordre que celle en matrice circulaire ( $\dot{\varepsilon} \approx 0.004\text{s}^{-1}$ ). Le débit a été choisi suffisamment faible à fin de réduire l'effet de sensibilité à la vitesse de déformation et aussi permettre de prendre plusieurs images au cours du gonflage. Les essais sont arrêtés une fois l'éprouvette rompue.



Figure 3.6 : Photos de trois éprouvettes marquées à la peinture et gonflées jusqu'à rupture.

De la même façon que pour l'analyse des essais de gonflage circulaires abordés au chapitre 2, plusieurs images ont été prises au cours de chacun des essais de gonflage. Le système de mesure optique Aramis© permet une fréquence d'acquisition maximale d'une image toutes les 2s. On utilise généralement une fréquence d'acquisition plus faible en début d'essai (1 image pour 4 à 8s) et la fréquence maximale est utilisée en fin d'essai lorsque la tôle se rapproche de la rupture et que l'accroissement de la déformation devient rapide.

A titre d'exemple, une séquence d'images d'un essai de gonflage circulaire est représentée sur la Figure 3.7. Après corrélation, ces images ont servi au calcul du chemin de déformation et de la vitesse de déformation au cours du gonflage. Ces deux informations seront ultérieurement exploitées dans les modèles analytiques de striction.

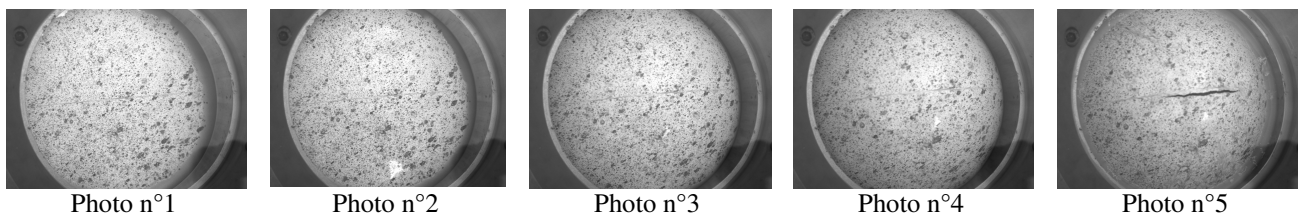


Figure 3.7 : Séquence d'images prises au cours d'un essai de gonflage circulaire.

Enfin, pour définir les courbes limites de formage, on a utilisé une méthode semblable à celle de Hecker [Hecker, 1972] : sachant qu'on dispose d'une image prise juste avant la rupture et que le débit utilisé est assez faible pour qu'il n'y ait pas trop de déformation durant cet intervalle de temps, on peut donc supposer que cette image est assez proche de la striction. Par une section perpendiculaire à la ligne de rupture (connue a posteriori), on identifie le maximum de déformation admissible avant rupture (Figure 3.8-a). Ensuite, pour l'image prise après rupture, on utilise la technique de Bragard [Bragard et al, 1972] pour estimer la déformation à striction. Cette déformation est ensuite portée sur le diagramme de Hecker en tant que déformation avec défaut (Figure 3.8-b).

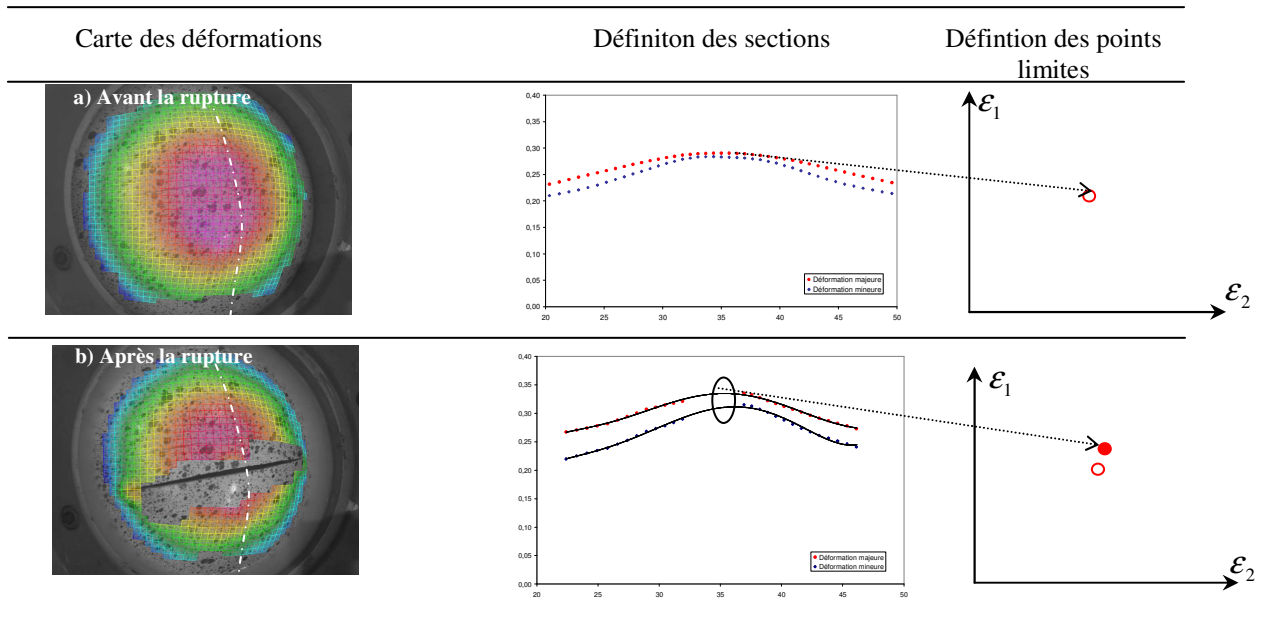


Figure 3.8 : Définition des points limites :  
a) avant la rupture ; b) après la rupture.

### 3.2.4.2. Résultats

Les Figures 3.9, 3.10 et 3.11 illustrent les CLF déterminées par des essais de gonflage pour les trois nuances d'acier. Sur ces mêmes graphes sont aussi représentées les CLF déterminées par d'autres types d'essais (Nakazima ou Marciniak).

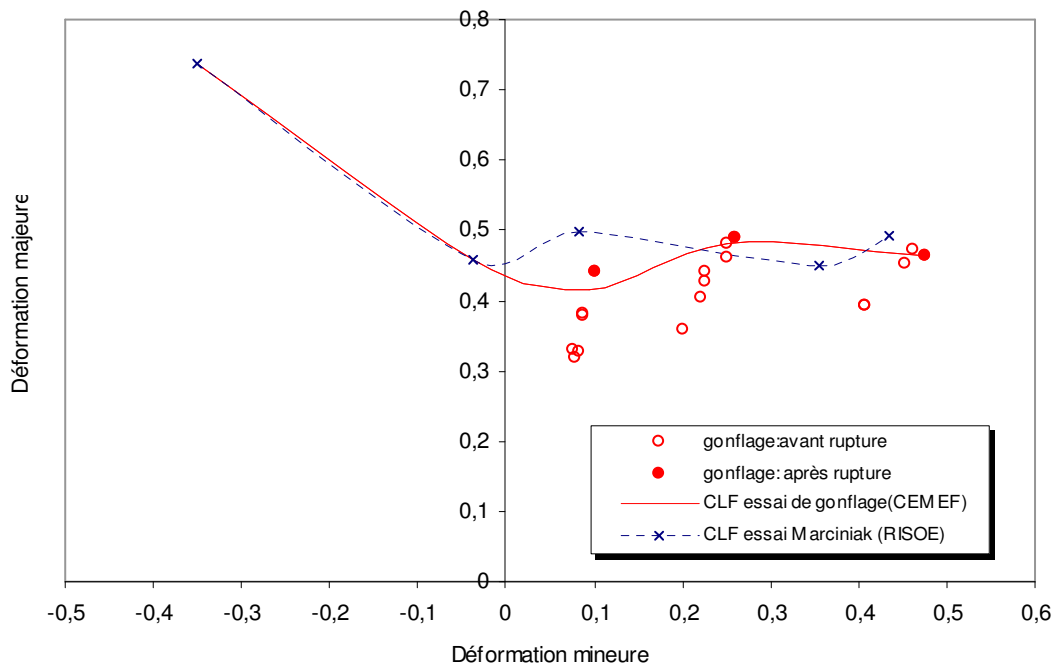


Figure 3.9 : Comparaison entre les CLF du DC04 identifiées par différents tests.



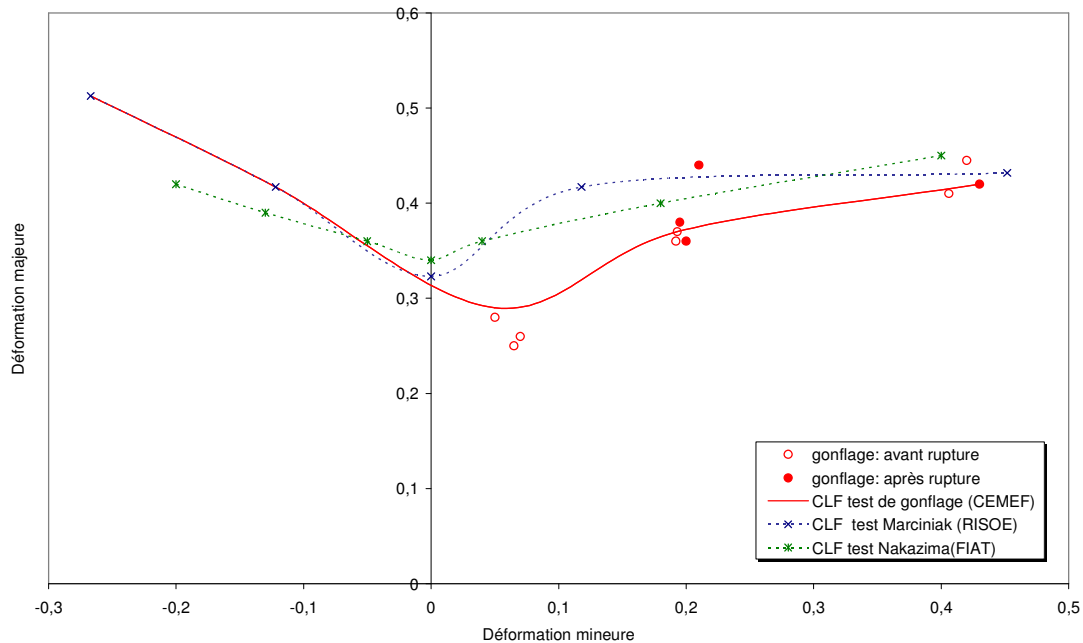


Figure 3.10 : Comparaison entre les CFL du DP450 identifiées par différents tests.

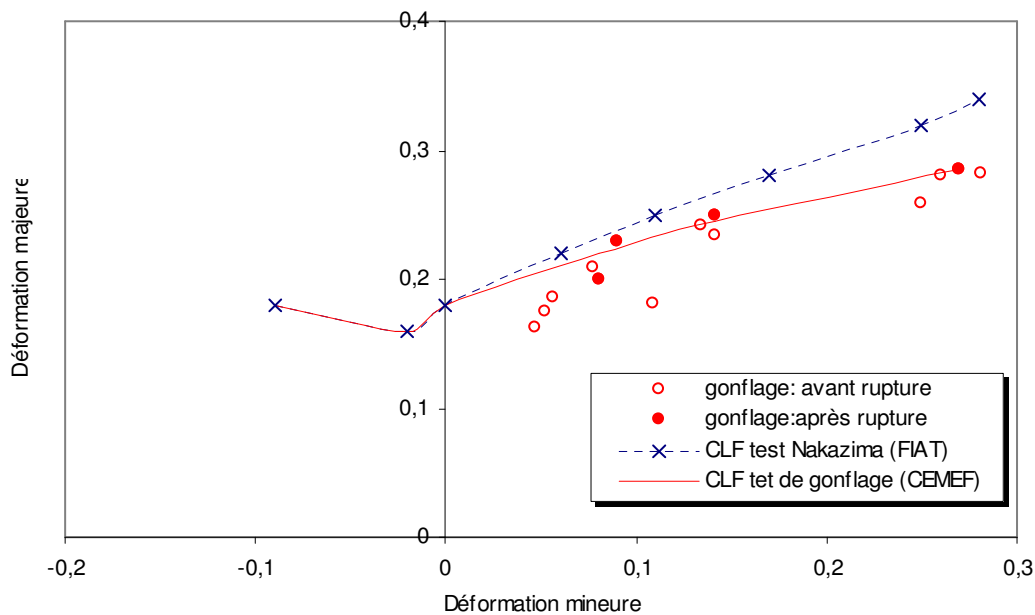


Figure 3.11 : Comparaison entre les CFL du TRIP800 identifiées par différents tests.

On note que les CLF identifiées par nos essais de gonflage sont assez proches des autres CLF, avec toutefois une tendance à se situer en dessous de ces dernières. Ces disparités sont liées à la différence du type de test, des conditions opératoires, du système de mesure des déformations et à la définition des points limites. En effet, une étude récente menée par Liebertz et al [Liebertz et al, 2004] a montré que la détermination expérimentale de la CLF d'un même matériau en utilisant le même test Nakazima mais par différents laboratoires, conduit à une grande disparité des courbes mesurées (Figure 3.12-a). Après normalisation des géométries des outils et des éprouvettes ainsi que des conditions opératoires, les nouvelles courbes identifiées sont beaucoup plus proches (Figure 3.12-b). Les écarts restants sont

dues entre autre à la non harmonisation des mesures des points limites mais aussi au caractère probabiliste que revêt le phénomène de striction comme souligné par [Van Minh et al, 1974]. Les auteurs soulignent que les écarts types sont d'autant plus élevés que le chemin est proche de l'état équiibiaxial. Ils préconisent, par ailleurs, 4 à 5 essais par chemin pour établir une valeur moyenne.

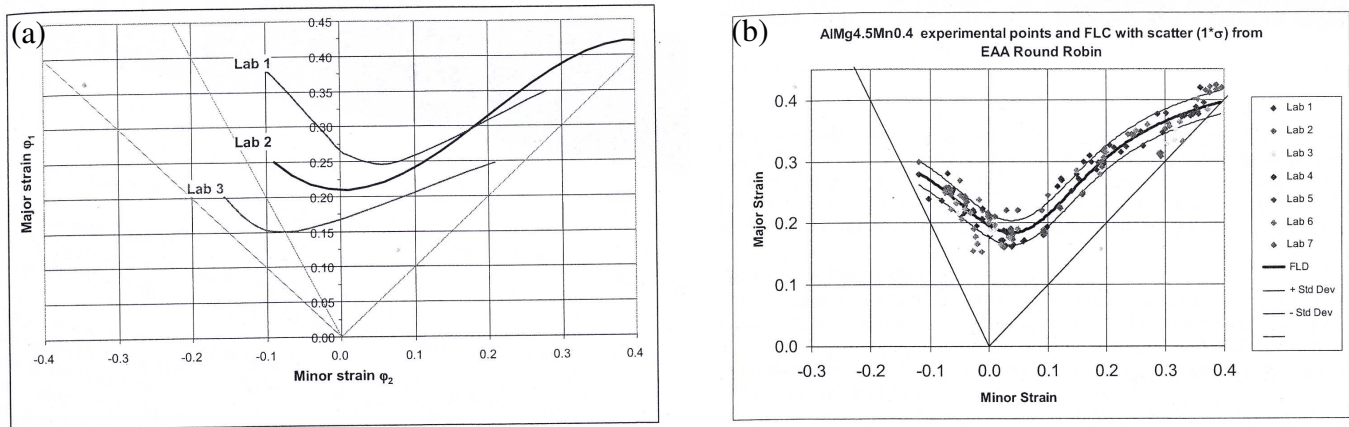


Figure 3.12 : Dispersion des CFL déterminées expérimentalement par test Nakazima et par différents laboratoires : a) Avant normalisation ; b) Après normalisation [Liebertz et al, 2004].

Nous remarquons aussi que pour le cas du DC04 et du DP450, le point limite correspondant à l'essai de gonflement elliptique N°2 est situé bien en dessous des CLF. Cette différence nous semble, en partie, due à la non linéarité du chemin de déformation suivi au cours de ces essais. En effet, sur la Figure 3.13 on peut voir que l'évolution de l'état de déformation au pôle d'une éprouvette gonflée à travers la matrice elliptique N°2 s'écarte du chemin linéaire. Graf [Graf et al, 1993] retrouve pour des essais Marciniak des chemins non linéaires semblables à ceux qu'on observe en gonflement elliptique. L'auteur souligne ainsi que ces chemins conduisent à des limites de formabilité inférieures à celles des chemins linéaires.

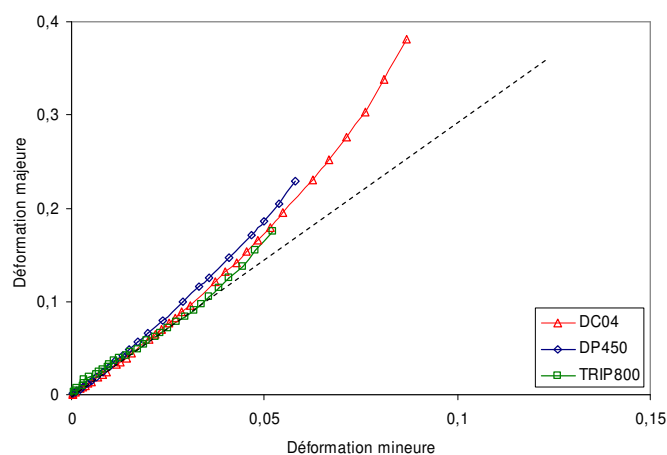


Figure 3.13 : Chemin de déformation en gonflement elliptique N°2.

Le faible rayon de courbure au pôle des essais elliptiques peut aussi influencer les déformations limites. En effet, [Chen et al, 1989] montre dans le cas des essais Nakazima que les niveaux des déformations

limites augmentent lorsque le rayon de courbure du poinçon est diminué ; ils attribuent cet effet aux gradients de déformation. Dans le cas présent on note une tendance inverse.

A noter que pour l'alliage d'aluminium, des ruptures au niveau du rayon d'entrée de la matrice N°2 n'ont pas permis le gonflage complet de la tôle et donc l'identification de la déformation à rupture. En outre, ne disposant pas d'autres mesures de striction, nous présenterons donc pas de CLF pour cette nuance.

### 3.3. Critères analytiques d'apparition de la striction

Une éprouvette de traction sollicitée par un chargement extérieur commence par se déformer d'une façon homogène le long de sa zone utile. Cependant, l'éprouvette ne peut se déformer indéfiniment d'une manière homogène, et arrivée à un certain niveau de chargement, la déformation commence à se localiser d'une manière diffuse. Certains matériaux peuvent présenter un potentiel de déformation au-delà de la striction diffuse ; la tôle continue alors de se déformer jusqu'à l'apparition d'une bande de striction qui précède la rupture complète de l'éprouvette. Cette deuxième striction est appelée striction localisée (Figure 3.14).

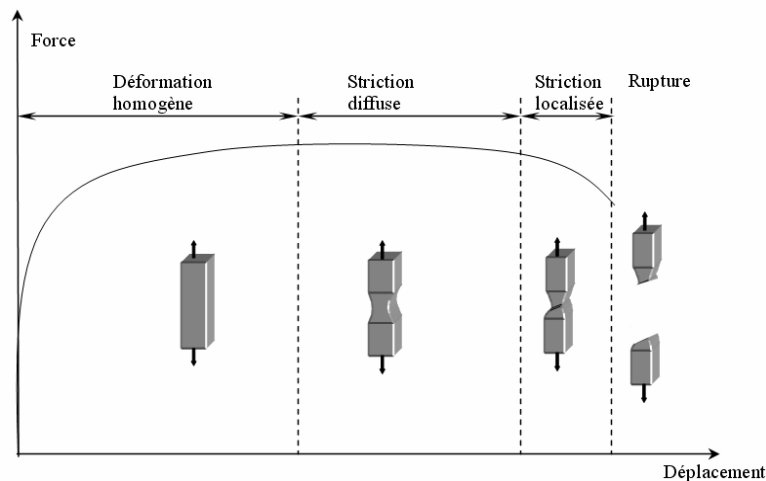


Figure 3.14 : Striction diffuse et striction localisée en traction uni-axiale.

Dans ce paragraphe on s'intéressera aux différents modèles analytiques permettant de prévoir l'apparition de la striction diffuse et de la striction localisée.

#### 3.3.1. Critères d'instabilité plastique

Ces critères considèrent que la striction (diffuse ou localisée) correspond à une instabilité de l'effort plastique. On présente dans la suite quelques critères.

##### 3.3.1.1. Critère de Considère

Considère fut le premier en 1885 à analyser théoriquement l'apparition de la striction diffuse sur une éprouvette cylindrique soumise à un chargement uni-axial. Son modèle repose sur le fait que la striction diffuse apparaît lorsque la force de traction  $F$  atteint sa valeur maximale, soit :

$$dF = d(\sigma.A) = \sigma.dA + A.d\sigma = 0 \quad (3.1)$$

où  $\sigma$  correspond à la contrainte de traction et  $A$  la section courante de l'éprouvette.

Dans l'hypothèse d'incompressibilité plastique (en négligeant la déformation élastique), on a :

$$\frac{dA}{A} = -d\varepsilon \quad (3.2)$$

avec  $\varepsilon$  la déformation longitudinale de l'éprouvette. En substituant (3.2) dans (3.1), la relation de Considère est donc définie par :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{Z_c} = 1 \quad (3.3)$$

avec  $Z_c$  appelée la tangente critique. Appliquée à une loi d'écrouissage de type Hollomon ( $\sigma = K\varepsilon^n$ ), la déformation à la striction diffuse est donc égale au coefficient d'écrouissage  $n$ .

Ce critère reste limité par son aspect uni-axial et ne peut être utilisé pour définir la limite de formabilité dans un état de chargement bi-axial quelconque.

### 3.3.1.2. Critère de Swift

Swift [Swift, 1952] a introduit une extension du critère de Considère pour un état de contrainte bi-axial. Il considère un état de contraintes planes :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \Omega \cdot \sigma_1 \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec  $(\sigma_1, \sigma_2)$  les contraintes principales s'exerçant sur l'élément de volume représenté sur la Figure 3.15,  $\Omega$  le rapport des contraintes et  $\sigma_3$  la contrainte normale.

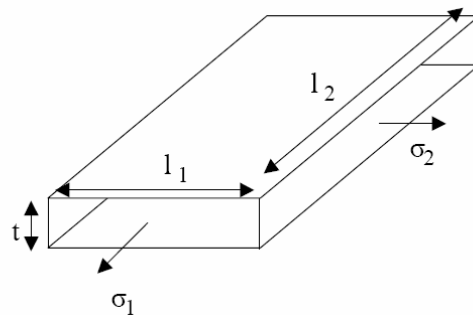


Figure 3.15 : Analyse de Swift.

L'hypothèse de stationnarité de l'effort est maintenant généralisée pour les deux forces s'exerçant suivant les deux directions des contraintes principales :

$$\begin{aligned} dF_1 &= 0 \\ dF_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

La condition de stabilité de Swift est énoncée comme suit :

$$\begin{aligned} dF_1 \text{ ou } dF_2 > 0 &\Rightarrow \text{équilibre stable} \\ dF_1 \text{ et } dF_2 \leq 0 &\Rightarrow \text{équilibre instable} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sachant que  $(\sigma = F / S)$ , et tenant compte de l'incompressibilité plastique, l'équation (3.5) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} - d\varepsilon_1 &= 0 \\ \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} - d\varepsilon_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

où les incréments de déformation sont définis par :

$$d\varepsilon_1 = \frac{dl_2}{l_2} ; d\varepsilon_2 = \frac{dl_1}{l_1} ; d\varepsilon_3 = \frac{dt}{t} \quad (3.8)$$

La différentielle totale de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  conduit à l'expression suivante :

$$d\bar{\sigma} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 \quad (3.9)$$

Les équations de Levy Mises<sup>8</sup>, combinées à l'équation (3.7) conduisent à :

$$d\bar{\sigma} = \left[ \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2 \right] d\bar{\varepsilon} \quad (3.10)$$

Par ailleurs, en partant du principe du travail équivalent, et des équations de Levy Mises, il est possible d'établir la relation suivante :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2 \quad (3.11)$$

En divisant terme à terme les équations (3.10) et (3.11) et en tenant compte de la condition de consistante ( $f = \bar{\sigma} - \sigma_u = 0$ , cf. eq 2.5), on aboutit à l'expression suivante du critère de Swift:

$$\frac{1}{\sigma_u} \frac{d\sigma_u}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2} = \frac{1}{Z_s} \quad (3.12)$$

$Z_s$  représente la tangente critique du critère de Swift.

---

<sup>8</sup> L'équation de Levy Mises :  $d\bar{\varepsilon} = d\varepsilon_1 \left/ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right. = d\varepsilon_2 \left/ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right.$ .

### 3.3.1.3. Critère de Hill

Le critère de striction localisée de Hill [Hill, 1952] repose sur une observation expérimentale cruciale : la localisation de la déformation apparaît sous la forme d'une bande étroite. Au niveau de celle-ci, la matière s'écoule selon un mode de déformation plane. Autrement dit, dans la direction de la bande, indiquée par le vecteur  $\vec{t}$  sur la Figure 3.16, la déformation est nulle ( $d\epsilon_t = 0$ ), alors que le matériau peut se déformer dans les deux autres directions (la direction normale  $\vec{n}$ , et dans l'épaisseur). L'auteur suppose également que la formation de la bande coïncide avec la stationnarité de l'effort normal ( $dF_n = 0$ ).

Sur la Figure 3.16, on note par (1,2) le repère des contraintes principales, et par  $(\vec{t}, \vec{n})$  le repère local à la bande. Ce dernier est orienté d'un angle  $\phi$  par rapport au premier repère.

Moyennant un opérateur de rotation, il est possible d'exprimer le tenseur des déformations dans le repère tangent en fonction du tenseur des déformations du repère global. En particulier, la déformation longitudinale s'écrit :

$$d\epsilon_t = (\sin \phi)^2 d\epsilon_1 + (\cos \phi)^2 d\epsilon_2 \quad (3.13)$$

Par ailleurs, étant donné que  $d\epsilon_t = 0$ , il en découle que :

$$(\tan \phi)^2 = -\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} = -\beta \quad (3.14)$$

Cette relation ne peut être vérifiée que si ( $\beta < 0$ ) ; c'est-à-dire que pour des états de déformation en rétreint. Dans ce cas, l'orientation de la bande est définie par :  $\phi = \arctg \sqrt{-\beta}$ .

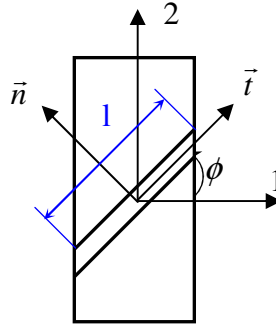


Figure 3.16: Modèle de striction localisée de Hill.

La première hypothèse du critère de Hill (état de déformation plane) permet de déterminer l'orientation de la bande de striction. La deuxième permettra d'établir le critère proprement dit. Elle s'énonce comme suit :

$$\frac{dF_n}{F_n} = 0 \quad (3.15)$$

En notant  $l$  la longueur de la bande et  $t$  son épaisseur, il en découle :

$$\frac{dF_n}{F_n} = \frac{d\sigma_n}{\sigma_n} + \frac{dt}{t} + \frac{dl}{l} = 0 \quad (3.16)$$

Comme  $d\epsilon_t = dl/l = 0$ , on a alors :

$$\frac{d\sigma_n}{\sigma_n} + d\epsilon_3 = 0 \quad (3.17)$$

Par ailleurs, on peut montrer que la contrainte normale s'exprime en fonction de la contrainte équivalente comme:

$$\frac{d\sigma_n}{\sigma_n} = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \quad (3.18)$$

En utilisant la condition d'incompressibilité plastique et en combinant les équations (3.17) et (3.18), on aboutit à :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} - (d\epsilon_1 + d\epsilon_2) = 0 \quad (3.19)$$

En tenant compte des équations de Levy Mises dans l'expression précédente, le critère de striction de Hill s'énonce :

$$\frac{1}{\sigma_u} \frac{d\sigma_u}{d\bar{\epsilon}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{Z_H} \quad (3.20)$$

avec  $Z_H$  la tangente critique du critère de Hill. En partant de l'équation (3.19) et pour une loi d'écrouissage de type Hollomon, le critère de Hill s'écrit :  $\epsilon_{lc} = n/(1 + \beta)$  qui n'est applicable que pour le domaine du rétreint.

#### 3.3.1.4. Critère de Ramaekers

Ramaekers et Bongaerts [Ramaekers et al, 1994] ont défini un critère de striction localisée dans le domaine d'expansion basé sur les trois considérations suivantes :

- la striction localisée est reliée à l'instabilité de l'effort majeur:  $dF_1 = 0$ ,
- la striction n'apparaît que pour un état de déformation plane. Ceci veut dire qu'il y a forcément un saut pour basculer du chemin courant vers un chemin de déformation plane :  $d\epsilon_2 = 0$ ,
- malgré le saut dans le chemin de déformation, les auteurs démontrent qu'au voisinage du point limite, la variation du chemin de déformation est nulle :  $d\beta = 0$ .

Pour tout critère de plasticité homogène, il est possible d'introduire la fonction  $\mathbf{f}$  définie par :

$$\sigma_1 = \mathbf{f}(\Omega) \cdot \bar{\sigma} \quad (3.21)$$

avec  $\Omega$  le rapport des contraintes défini par :

$$\Omega = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (3.22)$$

D'une manière analogue, il est possible d'exprimer le taux de déformation majeure sous la forme suivante :

$$d\epsilon_1 = g(\beta).d\bar{\epsilon} \quad (3.23)$$

avec  $\beta$  le rapport des taux de déformations défini par :

$$\beta = \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \quad (3.24)$$

Considérons à présent l'effort suivant la direction de la contrainte majeure, qu'on peut exprimer comme :

$$F_1 = \sigma_1.s_2 = \sigma_1.l.t \quad (3.25)$$

$l, t$  étant la largeur et l'épaisseur de la bande de cisaillement. On définit la déformation en épaisseur par  $\epsilon_3 = \ln(t/t_0)$  et la déformation mineure  $\epsilon_2 = \ln(l/l_0)$ .

En tenant compte des équations (3.21), (3.25) et pour une loi d'écrouissage de type Krupkowski (2.52), l'effort majeur s'écrit :

$$F_1 = \mathbf{f}(\Omega).l.t.K.(\bar{\epsilon} + \epsilon_0)^n \quad (3.26)$$

Rappelons que  $K$  est la consistante du matériau,  $\epsilon_0$  le seuil de déformation et  $n$  le coefficient d'écrouissage.

En considérant la condition d'incompressibilité ( $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$ ), les équations (3.23) et (3.26), ainsi que la définition des déformations principales, l'effort majeur peut s'écrire comme suit:

$$F_1(\epsilon_2, \epsilon_3, \beta) = \mathbf{f}(\Omega).K.l_0.t_0 \left[ -\frac{(\epsilon_2 + \epsilon_3)}{g} + \epsilon_0 \right]^n \exp \left\{ \frac{\epsilon_3}{1 + \beta} \right\} \quad (3.27)$$

La différentielle totale de l'effort conduit à :

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_2} d\epsilon_2 + \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_3} d\epsilon_3 + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} d\beta \quad (3.28)$$

Pour un chemin de déformation décrit par la variable  $\beta$ , le critère de Ramaekers postule que la striction correspond à une stationnarité de l'effort ( $dF_1 = 0$ ), un état de déformation plane ( $d\epsilon_2 = 0$ ) et une variation nulle du chemin ( $d\beta = 0$ ). A partir de ces trois hypothèses, la différentielle de l'effort se réduit à :

$$dF_1|_{\beta} = \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_3} d\epsilon_3 = 0 \quad (3.29)$$

où :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_3} = \frac{\mathbf{f}(\Omega).K.l_0.t_0}{g^n} \frac{\partial}{\partial \epsilon_3} \left\{ (-\epsilon_2 - \epsilon_3 + g\epsilon_0)^n \exp \left( \frac{\epsilon_3}{1 + \beta} \right) \right\} = 0 \quad (3.30)$$



Il en découle que la déformation majeure à striction correspond à :

$$\varepsilon_{lc} = n(1 + \beta) - g \cdot \varepsilon_0 \quad (3.31)$$

En adoptant un critère de striction de Hill pour le domaine de rétreint, les auteurs regroupent sous la même équation le critère de striction sur tout le domaine de déformation en terme de  $\varepsilon_{lc}$ , la déformation majeure critique :

$$\varepsilon_{lc} = n(1 + \beta)^q - g \cdot \varepsilon_0 \quad \text{avec} \begin{cases} q = -1 & \text{si } \beta < 0 \\ q = 1 & \text{si } \beta > 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

### Remarque

A la différence du modèle de Hill, dans l'approche de Ramaekers la bande de cisaillement a été supposée initialement orientée suivant le repère principal des contraintes (ce qui correspond à un angle  $\phi$  nul sur la Figure 3.16).

#### 3.3.1.5. Critère de Force Maximum Modifié

Ce critère a été introduit initialement par Hora et al [Hora, 1996], il a été ensuite couplé à un critère d'endommagement [Brunet et al, 1998], et appliqué à des critères de plasticité quadratiques et non quadratiques [Knockaert, 2001].

Le critère de Force Maximum Modifié est un critère de striction localisée qui repose sur une condition d'instabilité de l'effort au moment de l'apparition de la striction. On présente ici une expression telle qu'elle a été introduite par Hora [Hora et al, 1996] :

$$h(\bar{\varepsilon}) \leq g(\beta) \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \mathcal{F}(\Omega)}{\partial \Omega}}{\mathcal{F}(\Omega)} \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \frac{\beta}{\varepsilon_1} \right] \bar{\sigma} \quad (3.33)$$

$h$  est définie par :

$$h = \frac{\partial \sigma_u}{\partial \bar{\varepsilon}} \quad (3.34)$$

On reviendra sur ce critère au paragraphe §3.5 de ce chapitre pour le développer avec plus de détails et y introduire l'effet de la vitesse de déformation

### **3.3.2. Modèle de Marciniak et Kuczynski (M-K)**

Etant donné que la condition de la ligne d'expansion nulle du critère de Hill n'est pas vérifiée pour les déformations en expansion ( $\beta > 0$ ), et que malgré ceci une bande de striction localisée est observée pour ces mêmes chemins, d'autres hypothèses semblent donc nécessaires pour modéliser la striction localisée en expansion.

Une telle approche a été introduite par Marciniak et Kuczynski [Marciniak et al, 1967]. Les deux auteurs postulent la présence d'un défaut initial dont la géométrie est représentée sur la Figure 3.17: la zone de déformation homogène est notée (A) et la zone du défaut est notée (B). Le défaut est supposé orienté suivant la direction perpendiculaire à la contrainte principale, il est décrit par le rapport de l'épaisseur de la zone du défaut sur l'épaisseur de la zone homogène :

$$d_e = \frac{e_{0B}}{e_{0A}} \quad (3.35)$$

Le modèle M-K suppose qu'au cours du chargement, aussi bien la zone homogène (A) que la zone du défaut (B) vont se déformer simultanément pour accommoder le chargement extérieur. Dès que la déformation commence à se concentrer dans la zone du défaut au détriment de la zone homogène, le modèle considère que la striction localisée est atteinte.

En partant des travaux originels de Marciniak et Kuczynski [Marciniak et al, 1973], on présentera dans ce qui suit les principales étapes de calcul du modèle. Notons tout de même que depuis ces premiers travaux, la méthode a connu un très grand intérêt chez les chercheurs travaillant sur la modélisation de la striction. Ceci a drainé de nombreuses publications avec une grande variété d'hypothèses et d'algorithmes sur lesquels on reviendra en fin de ce paragraphe.

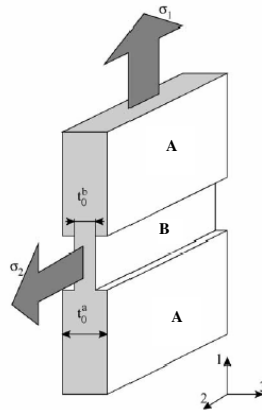


Figure 3.17: Défaut géométrique du modèle de M-K [Banabic et al, 2004].

L'équation d'équilibre du modèle géométrique (Figure 3.17) projetée suivant la direction (1) conduit à :

$$e_A \sigma_{1A} = e_B \sigma_{1B} \quad (3.36)$$

ou bien en introduisant la contrainte équivalente :

$$e_A \bar{\sigma}_A \left( \frac{\sigma_{1A}}{\bar{\sigma}_A} \right) = e_B \bar{\sigma}_B \left( \frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B} \right) \quad (3.37)$$

Les épaisseurs courantes peuvent être exprimées en fonction des épaisseurs initiales comme :

$$\begin{aligned} e_A &= e_{0A} \cdot \exp(\varepsilon_{3A}) \\ e_B &= e_{0B} \cdot \exp(\varepsilon_{3B}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

En supposant une loi d'évolution de type puissance :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_A &= K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_A)^n \dot{\bar{\varepsilon}}_A^m \\ \bar{\sigma}_B &= K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_B)^n \dot{\bar{\varepsilon}}_B^m \end{aligned} \quad (3.39)$$

l'équation (3.37) devient :

$$e_{0A} \cdot \exp(\varepsilon_{3A}) \cdot K \cdot (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_A)^n \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}_A^m \left( \frac{\sigma_{1A}}{\bar{\sigma}_A} \right) = e_{0B} \cdot \exp(\varepsilon_{3B}) \cdot K \cdot (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_B)^n \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}_B^m \left( \frac{\sigma_{1B}}{\bar{\sigma}_B} \right) \quad (3.40)$$

En se rappelant de l'équation (3.35) et de la relation  $\dot{\varepsilon}_A / \dot{\varepsilon}_B = d\varepsilon_A / d\varepsilon_B$ , l'équation différentielle suivante peut être définie :

$$\left( \frac{\sigma_{1A} / \bar{\sigma}_A}{\sigma_{1B} / \bar{\sigma}_B} \right) \left( \frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B} \right)^m = d_e \left( \frac{\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_B}{\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_A} \right)^n \exp(\varepsilon_{3B} - \varepsilon_{3A}) \quad (3.41)$$

A présent, il reste à exprimer  $\sigma_{1A} / \bar{\sigma}_A$  et  $\sigma_{1B} / \bar{\sigma}_B$  en fonction des variables  $\bar{\varepsilon}_A$  et  $\bar{\varepsilon}_B$ .

Dans la zone A, le rapport des contraintes  $\sigma_{1A} / \bar{\sigma}_A$  reste constant durant tout le chargement, il peut donc être exprimé en fonction du rapport des contraintes  $\Omega$ . D'après les définitions (3.21), le rapport des contraintes s'exprime comme :

$$\frac{\sigma_{1A}}{\bar{\sigma}_A} = f(\Omega_A) \quad (3.42)$$

A la différence de la zone homogène, dans la zone du défaut (B), le rapport des contraintes  $\sigma_{1B} / \bar{\sigma}_B$  évolue au cours de la déformation. Il peut être déduit à partir de la condition de compatibilité des déformations dans la direction (2) du chargement qui s'exprime par :

$$\varepsilon_{2A} = \varepsilon_{2B} \quad \text{ou} \quad d\varepsilon_{2A} = d\varepsilon_{2B} \quad (3.43)$$

Après quelques développements, les auteurs aboutissent au système d'équations différentielles intégrales suivant :

$$\frac{\sqrt{1-B}(d\bar{\varepsilon}_A/d\bar{\varepsilon}_B)^m}{\sqrt{1-B(d\bar{\varepsilon}_A/d\bar{\varepsilon}_B)^2}} = d_e \left( \frac{\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_B}{\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_A} \right)^n \exp(C\bar{\varepsilon}_A - \varepsilon_{3B}) \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{3B} = \int_0^{\bar{\varepsilon}_B} A \sqrt{1 - B \left( \frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B} \right)^2} + D \left( \frac{d\bar{\varepsilon}_A}{d\bar{\varepsilon}_B} \right) d\bar{\varepsilon}_B$$

où les paramètres  $A, B, C$  et  $D$  sont exprimés en fonction des paramètres du critère de plasticité quadratique utilisé.

Finalement par une méthode de Runge-Kutta, l'équation (3.44) est résolue et il est ainsi possible de suivre l'évolution du rapport des déformations  $\bar{\varepsilon}_A / \bar{\varepsilon}_B$  au cours de la déformation. La striction localisée

débutera lorsque l'amincissement dans la zone du défaut atteint une valeur seuil critique ( $\varepsilon_{3B} = \varepsilon^*$ ), les déformations majeure et mineure correspondant à ce point critique et mesurées dans la zone homogène définissent le point limite.

L'approche de Marciniak et Kuczynski [Marciniak et al, 1973] a conduit à la définition d'une équation différentielle finale (3.44) exprimée en fonction des seules variables  $\bar{\varepsilon}_A, \bar{\varepsilon}_B$  et  $\varepsilon_{3B}$ . Ceci est rendu possible grâce aux simplifications offertes par les critères quadratiques utilisés (Von Mises, Hill48). Pour des critères non quadratiques, les dites simplifications ne sont plus (ou difficilement) possibles et l'algorithme initial de Marciniak s'avère être peu commode. Divers algorithmes ont été proposés par la suite pour pouvoir appliquer le modèle du défaut initial à des critères de plasticité quelconques, citons à ce titre [Xu et al, 1998], [Banabic et al, 2004], [Cao et al, 2000], [Friedman et al, 2000].

Même si ces critères peuvent varier, ils reposent tous sur deux hypothèses fondamentales :

- la condition d'équilibre entre la zone du défaut et la zone homogène (3.36),
- la condition de compatibilité des déformations (3.43).

Les différences se manifestent par :

- 1- Le type de la variable d'incrémentations permettant de contrôler la progression du chargement ( $d\bar{\varepsilon}_A$  ou  $d\bar{\varepsilon}_B$ ).
- 2- Les variables indépendantes choisies et celles calculées.
- 3- Le critère d'arrêt : Lejeune [Lejeune, 2002] a recensé différents critères de convergence ; pour Friedman [Friedman et al, 2000] la striction apparaît lorsque  $10 < d\varepsilon_{1B}/d\varepsilon_{1A}$ , alors que pour Butuc [Butuc et al, 2003] la condition d'arrêt est  $10 < d\bar{\varepsilon}_B/d\bar{\varepsilon}_A$ .

Si dans le modèle initial de Marciniak le défaut a été supposé orienté suivant la direction perpendiculaire à la direction de la contrainte principale majeure, Hutchinson [Hutchinson, 1978] a considéré le cas général pour lequel le défaut est orienté suivant un angle non nul par rapport au repère du matériau ce qui a permis d'étendre le modèle M-K au domaine du rétreint.

### Le modèle analytique équivalent

L'approche du modèle M-K repose sur le suivi incrémental d'un défaut initial et la détection de la striction une fois la valeur critique du défaut atteinte. De part son caractère incrémental, l'utilisation d'un tel modèle dans un code de calcul EF n'est pas immédiate. C'est pourquoi, Mesrar [Mesrar, 1998] a proposé d'approcher les prédictions du modèle de M-K par un modèle analytique empirique équivalent. Ce modèle équivalent s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{2 + \beta}{2\sqrt{1 + \beta + \beta^2}} \left( n - \sqrt{2nd_e} + \left( m + \frac{5\beta^2}{(2 + \beta)^2} (\alpha_p^2 - 1) \right) \ln \left( \frac{1}{d_e} \right) \right) \quad \text{si } \beta < 0 \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{1 + \frac{2\bar{r}}{1 + \bar{r}} \beta + \beta^2}}{1 + \beta} \left( n - \sqrt{2nd_e} + m \ln \left( \frac{1}{d_e} \right) \right) \quad \text{si } \beta > 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

$d_e = (e_{0A} - e_{0B})/e_{0A}$  est le défaut initial,  $\bar{r}$  le coefficient de Lankford et  $\alpha_p$  le rapport de la contrainte plane par la contrainte équi-biaxiale ( $\alpha_p = \sigma_p / \sigma_b$ ). Cette expression se veut indépendante de tout critère de plasticité puisque seuls les paramètres  $\bar{r}$  et  $\alpha_p$  sont nécessaires pour décrire l'état d'anisotropie du matériau.

### 3.3.3. Méthode de Perturbation

Les critères d'instabilité plastique, évoqués au paragraphe §3.3.1, reposent sur une approche globale pour l'étude de la striction localisée. Ce problème peut aussi être considéré comme étant un problème d'instabilité de l'écoulement local de la matière. De ce fait, la méthode générale classique utilisée pour l'étude de la stabilité par perturbation peut être appliquée à l'étude de la striction localisée.

Dudzinski et Molinari [Dudzinski et al, 1990] ont ainsi appliqué la méthode de perturbation linéarisée pour la prédiction de la striction localisée en contraintes planes. Le principe de la technique consiste à perturber les équations régissant l'équilibre local puis à observer l'évolution de cette perturbation. Dès lors que la perturbation tend à croître d'une manière significative par rapport à la solution homogène, l'équilibre est alors considéré comme instable.

Nous commençons par rappeler l'ensemble des équations régissant l'équilibre local d'un matériau supposé rigide plastique. Certaines de ces équations ont déjà été introduites au chapitre 2:

§ La loi d'écrouissage	$\sigma_u = K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n \dot{\bar{\varepsilon}}^m$	
§ La contrainte équivalente de Hill48, le tenseur $\mathbf{P}$ regroupe les paramètres du critère de Hill introduits dans (2.22).	$\bar{\sigma} = \sigma : \mathbf{P} : \sigma$	
§ Le critère de plasticité	$f(\sigma, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}) = \bar{\sigma} - \sigma_u(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}) \leq 0$	
§ L'équation d'équilibre, avec $e$ l'épaisseur de la tôle	$\text{div}(e\sigma) = 0$	(3.46)
§ La condition de compatibilité	$\text{rot}(\text{rot}(\dot{\varepsilon})) = 0$	
§ La condition d'incompressibilité plastique	$\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = 0$	
§ La loi d'écoulement associée (2.10)	$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$	

L'ensemble de ces équations peut se mettre sous la forme d'un système non linéaire dont la forme générique est donnée par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

où  $\mathbf{A}$  est un opérateur non linéaire et  $\mathbf{U}$  correspond au vecteur des inconnues du système. Notons que les équations définies par (3.46) sont vérifiées aussi bien en 2D qu'en 3D.

En 2D (hypothèse de contraintes planes), le vecteur  $\mathbf{U}$  est composé de 9 inconnues ([Boudeau, 1996] et [Knockaert, 2001]):

$$\mathbf{U}^T = (\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{12}, \dot{\epsilon}_{33}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \bar{\sigma}, \dot{\epsilon}) \quad (3.48)$$

alors qu'en 3D ([Lejeune, 2002]), le vecteur inconnu  $\mathbf{U}$  est composé de 14 variables:

$$\mathbf{U}^T = (\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{12}, \dot{\epsilon}_{23}, \dot{\epsilon}_{13}, \dot{\epsilon}_{33}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, \bar{\sigma}, \dot{\epsilon}) \quad (3.49)$$

Pour définir une condition nécessaire de stabilité, il faut introduire une perturbation à chacune des inconnues du problème. Cette perturbation est de la forme :

$$\delta \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}_0 q(x, t) \quad (3.50)$$

où  $\delta \mathbf{U}_0$  est l'amplitude initiale de la perturbation et  $q$  comporte la partie spatiale et temporelle de la perturbation :

$$q(x, t) = \exp(\eta t) \exp(i \xi \cdot \vec{x} \cdot \vec{n}) \quad (3.51)$$

$\vec{x}$  décrit la position du point considéré et  $\vec{n}$  la normale au plan de la perturbation. Si en 2D la normale peut être décrite par le seul angle  $\psi$ , en 3D deux angles  $(\psi, \varphi)$  sont alors nécessaires (Figure 3.18).

L'équation d'équilibre (3.47) perturbée est définie par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}_0 + \delta \mathbf{U}) = 0 \quad (3.52)$$

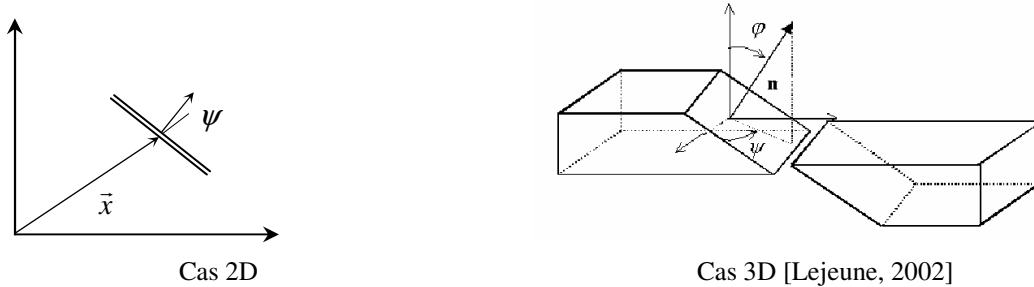


Figure 3.18 : Définition des vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{n}$ .

Après linéarisation de cette équation (les termes de second ordre sont négligés) et en tenant compte de l'équation (3.47), la méthode aboutit au système linéaire suivant :

$$\mathbf{M}(\mathbf{U}_0, \psi, \varphi, \eta) \delta \mathbf{U}_0 = 0 \quad (3.53)$$

Pour avoir une solution non triviale du problème ( $\delta \mathbf{U}_0 \neq 0$ ), la matrice  $\mathbf{M}$  doit vérifier :

$$\det(\mathbf{M}(\mathbf{U}_0, \psi, \varphi, \eta)) = 0 \quad (3.54)$$

Il est possible de démontrer que cette équation se ramène à la résolution d'un polynôme de second ordre de la forme :

$$T(\eta) = A\eta^2 + B\eta + C = 0 \quad (3.55)$$

Dans cette équation les coefficients  $A, B, C$  sont fonction de  $\mathbf{U}_0, \psi, \varphi$  en 3D et de  $\mathbf{U}_0, \psi$  en 2D.

Remarque

En 2D, en plus des deux racines données par l'équation (3.55), zéro est une racine simple du problème perturbé (3.54). En 3D, zéro est une racine double.

D'après la définition de la perturbation (3.51), l'écoulement sera instable si :

$$\text{Re}(\eta) > 0 \quad (3.56)$$

Cependant, l'instabilité de l'écoulement détectée par ce critère n'est pas forcément synonyme de détection de la striction localisée. En appliquant ce critère, Boudeau [Boudeau, 1996] a pu ainsi détecter aussi bien le début de la striction diffuse que la striction localisée sur une simulation d'un essai de traction. Ce critère a également permis la détection du début d'un plissement sur un essai d'emboutissage. Ceci montre que la condition (3.56) est une condition nécessaire pour identifier les modes instables, mais pas suffisante pour reconnaître la striction localisée en particulier.

D'une manière générale, et pour avoir un critère discriminatoire, une valeur seuil est souvent introduite pour détecter la striction localisée (i.e  $\text{Re}(\eta) > \eta^*$ ).

Lejeune [Lejeune, 2002] a proposé un nouveau critère qui semble permettre la détection automatique de la striction et s'affranchir de la définition du seuil:

$$\text{Re}(\eta) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\dot{\eta}}{\dot{\epsilon}} > 1 \quad (3.57)$$

Remarque

Par rapport à un modèle 2D, le modèle 3D ne diffère pas simplement par la taille du problème à résoudre, mais permet également de détecter des modes d'instabilité qui ne sont pas accessibles en 2D.

Le modèle analytique équivalent.

Li et Chandra [Li et al, 1999] ont considéré une analyse par perturbation linéaire pour définir un critère analytique de striction formulé dans le cadre de la plasticité isotrope de von Mises et prenant en compte l'effet de la sensibilité à la vitesse. L'expression du critère est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_1^* &= \frac{n}{(1 + \beta) - \xi^* m} & \text{si } \beta < 0 \\ \bar{\epsilon}^* &= \frac{n(2 + \beta)^2}{4(1 + \beta + \beta^2)(1 + \beta) - \xi^* [3\beta^2 + m(2 + \beta)^2]} & \text{si } \beta > 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$n$  et  $m$  sont respectivement le coefficient d'écrouissage et le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. Le paramètre  $\xi^*$  correspond à la valeur critique que prend le rapport  $\xi = \eta / \dot{\epsilon}_1$  au moment de la striction.

### 3.3.4. Analyse de bifurcation

Pour la classe des problèmes incrémentaux avec conditions aux frontières et comportement rigide plastique ou élasto-plastique, Hill [Hill, 1958] a introduit une condition nécessaire pour la perte de l'unicité de la solution du problème, définie par :

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma} : \Delta \dot{\epsilon} dv = 0 \quad (3.59)$$

Où l'opérateur  $\Delta$  correspond à la différence entre deux champs distincts cinématiquement admissibles et supposés être chacun solution du problème en question défini sur le domaine  $\Omega$ .

Une autre condition locale suffisante et plus restrictive pour assurer l'unicité de la solution du problème est définie par :

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} > 0 \quad (3.60)$$

Si de plus on considère une loi constitutive sous la forme :

$$\dot{\sigma} = H : \dot{\epsilon} \quad (3.61)$$

en combinant les équations (3.60) et (3.61), la condition d'unicité est alors donnée par :

$$\dot{\epsilon} : H : \dot{\epsilon} > 0 \quad (3.62)$$

L'unicité de la solution est garantie lorsque le tenseur  $H$  est défini positif. Notons que pour une loi de plasticité associée, le tenseur  $H$  correspond au module tangent élasto-plastique.

Needleman [Needleman, 1988] a utilisé le critère de bifurcation (3.60) pour étudier la localisation de déformation en cisaillement simple. Il démontre que pour un matériau non visqueux, la bifurcation nécessite forcément un adoucissement du matériau. Cette condition est associée à une perte d'ellipticité du problème et donc de l'unicité de la solution ce qui engendre une infinité de solutions possibles parmi lesquelles la déformation en bande de cisaillement. L'introduction d'un comportement sensible à la vitesse de déformation élimine l'apparition de bifurcation. Cependant, d'après l'auteur, l'adoucissement dans le cas d'un comportement non visqueux n'est une condition ni nécessaire ni suffisante pour la localisation des déformations, c'est la perte d'ellipticité des équations incrémentales du problème qui engendre la localisation. Chen [Chen et al, 1989] suggère que la perte d'ellipticité du problème d'équilibre des membranes définit un critère de striction. Toutefois l'utilisation de ce critère pour la simulation des CLF semble montrer des résultats trop conservatifs par rapport aux CLF expérimentales des aciers, la localisation n'est donc pas associée uniquement à la perte d'ellipticité. Petryk [Petryk, 1996] associe la perte d'ellipticité des équations d'équilibre linéarisées non pas à la localisation des déformations mais plutôt au début de la déformation 'quasi-stable' non-uniforme (striction diffuse). La striction localisée est associée à la perte de la stabilité des équations.

#### Application à l'étude de la striction

La méthode de bifurcation, appliquée à l'étude de la striction, vise à déterminer la possibilité d'apparition d'une discontinuité du tenseur gradient de vitesse dans un champ de déformation initialement homogène. Stören-Rice [Stören-Rice, 1975] ont donc introduit un champ de vitesse  $\bar{v}$  susceptible de décrire ce mode de déformation. A la bifurcation, le tenseur gradient de vitesse subit



une discontinuité en traversant le plan de bifurcation  $\Gamma$  dont la normale est définie par  $\vec{n}$  (Figure 3.19). Le saut de vitesse entre la bande de cisaillement et la zone homogène est donné par<sup>9</sup> :

$$[\vec{v}] = \vec{g} \quad (3.63)$$

La discontinuité du gradient de vitesse s'écrit alors :

$$[\text{grad} \vec{v}] = \vec{g} \otimes \vec{n} \quad (3.64)$$

L'équilibre des contraintes à travers la discontinuité s'écrit :

$$\vec{n} \cdot [\dot{\boldsymbol{\sigma}}] = 0 \quad (3.65)$$

En tenant compte de la loi de comportement (3.61) et en supposant un comportement identique pour la zone homogène et la zone de discontinuité, les équations (3.64) et (3.65) conduisent à :

$$(\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{g} = 0 \quad (3.66)$$

La condition de localisation s'écrit alors :

$$\det(\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (3.67)$$

Le tenseur de second ordre  $\mathbf{Q} = \vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}$  est appelé tenseur acoustique. Comme en plasticité associée le tenseur  $\mathbf{Q}$  est symétrique, la condition de localisation (3.67) correspond alors à la perte d'ellipticité des équations d'équilibre [Knockaert, 2001].

Ito [Ito et al, 2000] a généralisé l'étude de bifurcation pour un état de déformation 3D. De la même manière que l'approche de Stören-Rice [Stören-Rice, 1975], l'auteur définit un plan de bifurcation de normale  $\vec{n}$ . La condition de bifurcation 3D s'écrit alors :

$$\exists \vec{n} \text{ et } \vec{m} \quad / \quad \min[\mathbf{I}(\vec{n}, \vec{m})] = \min(\vec{m} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{m}) = 0 \quad (3.68)$$

Le vecteur  $\vec{m}$  est un vecteur unitaire décrivant le saut de vitesse  $\vec{g} = \lambda \cdot \vec{m}$  (3.63). Ce vecteur décrit le mode de bifurcation, il peut être décomposé en fonction de trois modes fondamentaux.

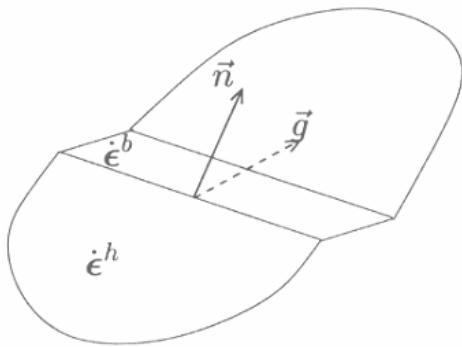


Figure 3.19 : Définition du plan de discontinuité 2D et de la normale associée.

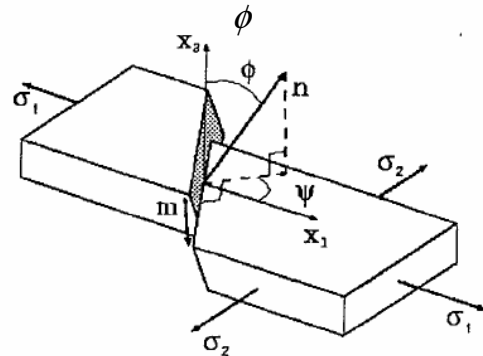


Figure 3.20 : Définition du plan de bifurcation 3D et de la normale associée [Ito et al, 2000].

<sup>9</sup>  $[x]$  désigne le saut de la variable  $x$  entre la zone homogène et la zone de discontinuité.

Le tenseur de contrainte qui apparaît dans l'expression de la fonction  $I$  sera contrôlé de manière à faire varier l'état de contrainte. En se plaçant dans le repère principal des contraintes et en faisant varier le rapport  $\Omega = \sigma_2/\sigma_1$ , la résolution de l'équation (3.68) permet d'identifier la déformation à la rupture ainsi que le mode de bifurcation associé.

Les prédictions du modèle de bifurcation en 3D (3.68) sont reportées sur la Figure 3.21 et comparées aux résultats du modèle de Stören-Rice 2D et aux mesures expérimentales. On note que le modèle 3D prédit non pas la courbe limite à striction mais plutôt la courbe limite à rupture. Les prédictions du modèle semblent être en bon accord avec les déformations à rupture dans le domaine d'expansion. En rétreint, le mode de bifurcation prédit par le modèle diffère des mesures expérimentales. Les auteurs suggèrent de considérer les modèles de bifurcation S-R et le modèle 3D comme étant respectivement les limites inférieure et supérieure des déformations à striction.

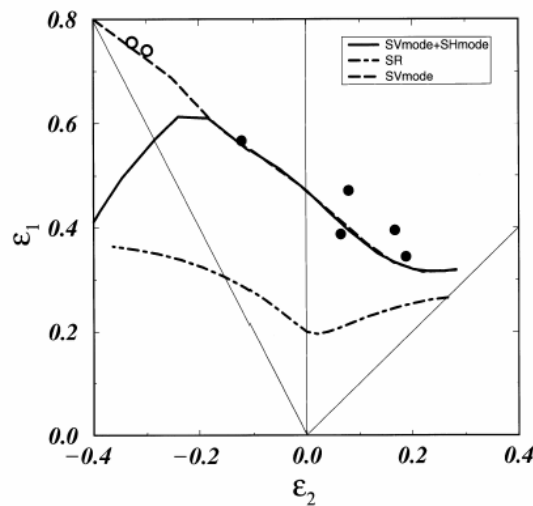


Figure 3.21 : Comparaison des prédictions du modèle de bifurcation 3D avec les déformations à rupture [Ito et al, 2000].

Les modèles de bifurcation en 2D et 3D peuvent être interprétés en considérant les différentes phases de gonflage d'un tube cylindrique (Figure 3.22-a) : au début du gonflage, le tube se déforme de façon homogène jusqu'à atteindre le point B. A partir de ce point la répartition des déformations n'est plus homogène : c'est la striction diffuse. Ensuite, la déformation continue à augmenter jusqu'à atteindre le point C où la striction localisée apparaît sur l'un des côtés du tube ; cette striction peut être modélisée par le critère de S-R. Le point D marque l'apparition de la bande de cisaillement au niveau de l'épaisseur du tube, c'est ce qui correspond aux prédictions du modèle de bifurcation 3D.

Le chemin 0-B-C-D sur la Figure 3.22-b décrit l'évolution de l'état de déformation pour un point U situé dans la zone homogène du tube, alors que le chemin 0-B-C'-D' correspond à l'évolution de l'état de déformation du point L situé au niveau de la bande de striction.

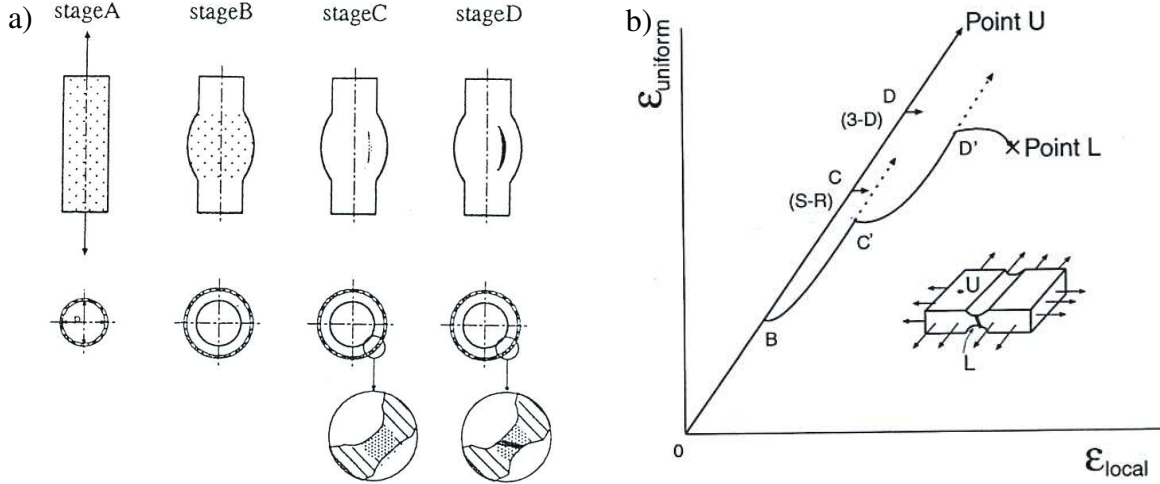


Figure 3.22 : Illustration du processus de la bifurcation.

Point B : striction diffuse selon le modèle de Swift ; Point C : striction localisée selon le critère de Stören-Rice ;  
Point D' : bifurcation en mode de cisaillement localisé selon le modèle de bifurcation 3D [Ito et al, 2000].

Il est important de souligner que l'analyse de bifurcation ne peut être appliquée avec la théorie de l'écoulement de type « J2-flow ». Il est bien établi que ce type de loi de comportement conduit à une surestimation de la formabilité du matériau. Pour mieux décrire les mesures expérimentales, plusieurs approches visant à introduire un adoucissement dans la loi constitutive du matériau se retrouvent dans la littérature ; Stören-Rice [Stören-Rice, 1975] utilisent l'apparition d'un vertex sur la surface de charge avec une formulation en grandes déformations, Ito et al [Ito et al, 2000] ont introduit une loi constitutive qui prend en compte les directions du tenseur vitesse de contraintes dans le calcul des directions du tenseur taux de déformation. Cette nouvelle loi autorise la bifurcation en mode de cisaillement. Toutefois, l'inconvénient de cette approche est qu'elle introduit un paramètre supplémentaire qu'il faut ajuster. Chater et al. [Chater et al I-II, 1982] considèrent la théorie de l'écoulement et la théorie de la déformation pour la simulation d'un essai de gonflage circulaire. Bien que les deux théories conduisent à des résultats globaux très proches en terme de profils de pression et de déformation (matériaux non visqueux), les auteurs démontrent qu'aucune bifurcation n'est observée avec la théorie de l'écoulement, en revanche, avec la théorie de la déformation une bifurcation (i.e localisation) apparaît en amont du pic de pression.

### Expression analytique du modèle de bifurcation

En partant des développements théoriques précédents, une expression analytique simple avec un critère de von Mises est déduite par Stören-Rice [Stören-Rice, 1975] pour définir la déformation limite, cette expression est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_1^* &= \frac{n}{1+\beta} \left[ \frac{1-n}{2} + \sqrt{\frac{(1+n)^2}{4} - \beta \frac{n}{(1+\beta)^2}} \right]^{-1} & \text{si } (\beta \leq 0) \\ \epsilon_1^* &= \frac{3\beta^2 + n(2+\beta)^2}{2(2+\beta)(1+\beta+\beta^2)} & \text{si } (0 \leq \beta) \end{aligned} \quad (3.69)$$

### 3.3.5. Synthèse

On a vu précédemment que le problème de la modélisation de la striction localisée des tôles minces peut être abordé de plus d'une façon. Selon la définition physique qu'on donne au phénomène de la striction, on peut distinguer quatre grandes techniques :

- Méthode de l'instabilité plastique : cette méthode considère que la localisation des déformations correspond à une instabilité de l'effort ( $dF=0$ ). Bien que la condition d'instabilité soit la même, on retrouve divers modèles (Swift, Hill, FMM, Ramaekers).
- Méthode du défaut initial : elle suppose la préexistence d'un défaut initial au niveau de l'éprouvette et qui se transforme en une striction.
- Méthode de perturbation : elle considère que la striction correspond à un état d'équilibre instable.
- Méthode de bifurcation : cette méthode suppose que la striction est une bifurcation de l'état d'équilibre homogène vers un état de striction localisée.

A l'exception du critère de Swift censé prédire la striction diffuse, tous les autres critères correspondent à des critères de striction localisée. Face à autant de modèles, il apparaît très difficile d'en choisir un en particulier.

Dans le tableau 3.1 on résume les différents modèles analytiques qui correspondent aux différents modèles de striction. Ces modèles analytiques ont le mérite de bien approcher les prédictions des méthodes un peu « sophistiquées » (telles que la méthode de perturbation, de bifurcation, ou M-K) par des expressions analytiques simples. Soulignons que parmi ces modèles, la méthode de perturbation et le modèle de Marciniak font intervenir un paramètre ajustable. Nous traçons sur la Figure 3.23 l'effet du paramètre 'défaut initial' sur les prédictions du modèle M-K. De même, on montre sur la Figure 3.24 l'effet du paramètre  $\xi^*$  (la valeur seuil de la perturbation) sur les prédictions de la méthode de perturbation.

Sur la Figure 3.25, on a reporté l'ensemble des CLF déterminées par les divers modèles présentés au tableau 3.1. Il est intéressant de faire les remarques suivantes :

- en rétreint, les modèles prédisent des droites très proches du modèle de Hill considéré comme étant le modèle de référence.
- tous les modèles prédisent une déformation limite de l'ordre de  $n$  (coefficient d'écrouissage) pour l'état de déformation plane. Notons que pour le modèle M-K, la taille du défaut initial est en général ajustée de façon à caler la déformation plane limite par rapport à la valeur expérimentale.
- en revanche, une grande disparité entre les prédictions des modèles est à souligner pour la zone d'expansion. En particulier, le modèle M-K présente une surestimation des déformations surtout au voisinage des déformations équi-biaxiales.

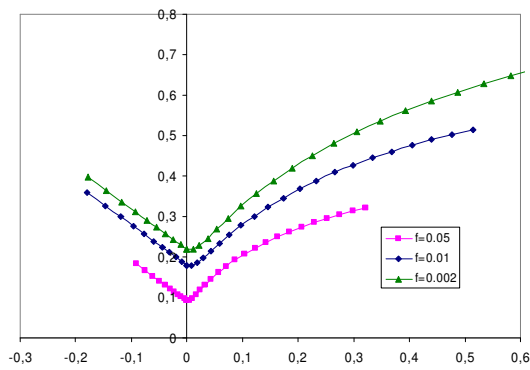


Figure 3.23 : Influence de la taille du défaut sur la prédiction des CLF par le modèle M-K.

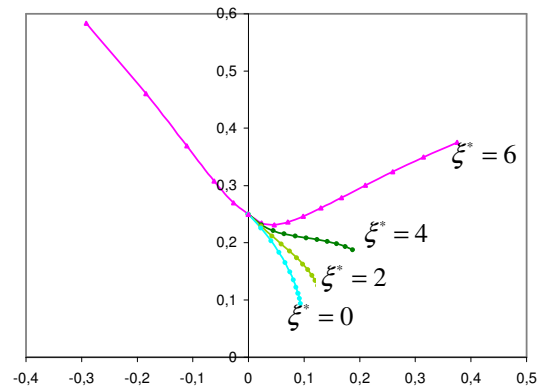


Figure 3.24 : Influence du paramètre  $\xi^*$  sur la prédiction des CLF par la méthode de perturbation.

Si le modèle M-K reste le modèle le plus étudié et appliqué dans la littérature, les résultats de ce modèle sont fortement dépendants du critère de plasticité utilisé et de la taille du défaut initial.

Le modèle de bifurcation semble aussi être en accord avec les mesures expérimentales. La généralisation du modèle au cas 3D a conduit à l'établissement des courbes limites à rupture dont l'exploitation n'est pas immédiate pour les simulations numériques par exemple. Par ailleurs, les résultats théoriques montrent la nécessité de considérer des lois de comportement très spécifiques (théorie de la déformation, comportement non visqueux...).

Le modèle de perturbation limité par la nécessité d'ajustement d'un paramètre seuil semble toutefois être amélioré en intégrant le critère automatique (3.57). Le critère d'instabilité de Swift continu à être utilisé couplé à des critères de plasticité non quadratiques [Banabic, 2001] et semble montrer de très bons accords avec l'expérience pour le cas des alliages d'aluminium. Aussi bien le modèle FMM que le modèle de Ramekears semblent montrer des tendances proches des mesures expérimentales [Brunet et al, 1998], [Ramekears, 2000].

Il semble donc difficile d'établir une évaluation objective permettant d'identifier le critère qui pourrait être appliqué sans restriction à tout type de matériau. Ceci est d'autant plus difficile que les résultats dans la littérature sont le plus souvent rapportés pour différents matériaux et avec divers critères de plasticité. C'est pourquoi, il nous semble fort intéressant de mener une étude comparative intensive entre ces différents modèles en les couplant aux divers critères de plasticité, quadratiques ou non quadratiques, pour ensuite les confronter aux mêmes résultats expérimentaux. Ceci permettra d'identifier le critère le plus fiable, voire à défaut, d'établir des statistiques et éventuellement définir un critère analytique hybride.

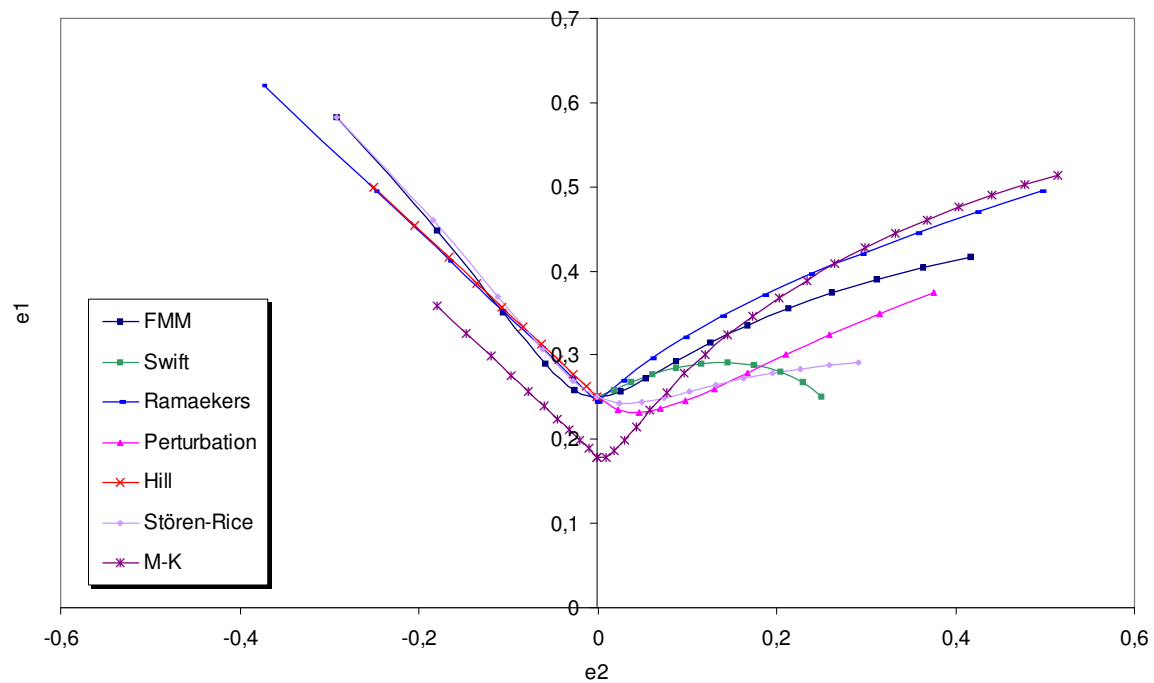


Figure 3.25 : Comparaison entre les prédictions des CLF avec les différents modèles de striction pour un critère de plasticité de Von Mises et un coefficient d'écrouissage  $n=0.25$ .

Tableau 3-1: Récapitulatif des expressions analytiques pour les différents modèles de prédiction de la striction.

	<i>Expression du modèle en rétreint</i>	<i>Expression du modèle en expansion</i>
<b>Critère de Hill</b>	$\frac{1}{\sigma_u} \frac{d\sigma_u}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2}$	
<b>Critère de Swift</b>	$\frac{1}{\sigma_u} \frac{d\sigma_u}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1}\right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2}\right)^2 \sigma_2}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2}$	$\frac{1}{\sigma_u} \frac{d\sigma_u}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1}\right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2}\right)^2 \sigma_2}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2}$
<b>Critère de Ramaeker</b>	$\bar{\varepsilon} = \frac{n(1+\beta)^{-1}}{g} - \varepsilon_0$	$\bar{\varepsilon} = \frac{n(1+\beta)}{g} - \varepsilon_0$
<b>Critère de Force Maximum Modifié (CFMM)</b>	$\bar{\varepsilon} = \left[ n + \frac{\frac{df}{d\Omega}}{f} \frac{\beta}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \right]$	$\bar{\varepsilon} = \left[ n + \frac{\frac{df}{d\Omega}}{f} \frac{\beta}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \right]$
<b>Critère de Marciniak-Kuzniski</b>	$\bar{\varepsilon} = \frac{2+\beta}{2\sqrt{1+\beta+\beta^2}} \left( n - \sqrt{2nd_e} + \left( m + \frac{5\beta^2}{(2+\beta)^2} (\alpha_p^2 - 1) \right) \ln \left( \frac{1}{d_e} \right) \right)$	$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\bar{r}}{1+\bar{r}} \beta + \beta^2}}{1+\beta} \left( n - \sqrt{2nd_e} + m \ln \left( \frac{1}{d_e} \right) \right)$
<b>Méthode de bifurcation</b>	$\bar{\varepsilon} = \frac{n}{1+\beta} \left[ g(\beta) \left( \frac{1-n}{2} + \sqrt{\frac{(1+n)^2}{4} - \beta \frac{n}{(1+\beta)^2}} \right) \right]^{-1}$	$\bar{\varepsilon} = \frac{3\beta^2 + n(2+\beta)^2}{2(2+\beta)(1+\beta+\beta^2)g(\beta)}$
<b>Méthode de perturbation</b>	$\bar{\varepsilon} = \frac{n}{g \cdot ((1+\beta) - \xi^* m)}$	$\bar{\varepsilon} = \frac{n(2+\beta)^2}{4(1+\beta+\beta^2)((1+\beta) - \xi^* [3\beta^2 + m(2+\beta)^2])}$

### **3.4. Analyse de l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation**

On a vu que lors d'un essai de traction, la phase de déformation homogène est limitée par l'apparition d'une localisation de la déformation sous la forme d'une striction diffuse, celle-ci se termine généralement par une striction localisée. Les modèles précédemment abordés font apparaître l'influence des différentes propriétés du matériau (coefficient d'écrouissage, critère de plasticité, chemin de déformation) sur l'apparition de l'une ou l'autre des strictions. Cependant, l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation n'a pas été abordé jusqu'à présent.

Dans la pratique, l'apport du coefficient de sensibilité à la vitesse (pour les aciers déformés à froid) n'est pas tellement la modification de l'instant d'apparition de la striction diffuse (c'est plus le coefficient d'écrouissage et les paramètres d'anisotropie qui sont déterminants) mais plus le prolongement du potentiel de déformation du matériau durant la striction diffuse. Ces observations ont été soulignées par [Ghosh, 1974] et confirmées dans le cas d'un chargement uniaxial par des simulations numériques par la méthode des éléments finis.

L'accroissement de la vitesse de déformation que subit un point matériel se trouvant dans la zone de la striction diffuse, va engendrer un accroissement de sa contrainte d'écoulement étant donnée sa sensibilité positive à la vitesse de déformation (cf. chap.2 § 1.5.2). Cet écrouissage supplémentaire conduit au fait que la déformation ne sera pas accommodée par le point matériel en question mais plus par l'ensemble des points matériels voisins dont les contraintes d'écoulement sont plus faibles. De proche en proche, la déformation s'étale, formant ainsi une zone de striction diffuse. C'est cette analyse qui a été proposée par plusieurs auteurs pour expliquer l'effet stabilisateur du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation pour les déformations quasi-stables.

Afin de modéliser les effets de la sensibilité à la vitesse, nous allons tout d'abord nous intéresser à leurs effets sur l'apparition de la striction diffuse, ensuite on présentera quelques modèles de la littérature pour étudier leurs influences sur la stabilité de la déformation diffuse.

#### **3.4.1. Analyse de Hart**

Selon Hart [Hart, 1967], une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour qu'une localisation significative de la déformation prenne lieu lors d'un essai de traction uni-axiale c'est la stationnarité de l'effort. L'étude de la localisation de la déformation au-delà de ce maximum d'effort peut être abordée à travers le taux de croissance d'un défaut présumé.

##### **3.4.1.1. Eprouvette à section homogène**

En premier lieu, on va considérer l'effet de la vitesse de déformation sur la condition d'effort maximum. Pour ce faire, une éprouvette de traction de section homogène sur toute sa longueur (sans aucun défaut de section) est considérée. La contrainte de traction est supposée de la forme  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ . La déformation est supposée isotherme et les effets d'inertie sont négligés.

La condition de stationnarité de l'effort s'écrit :

$$dF = 0 = \sigma.dA + A.d\sigma \quad (3.70)$$



où  $A$  correspond à la section de l'éprouvette.

En développant la différentielle totale de la contrainte :

$$0 = \sigma.dA + A \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\dot{\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \bigg|_{\varepsilon} d\dot{\varepsilon} \right] \quad (3.71)$$

où  $\varepsilon$  représente la déformation suivant la direction de l'étirement.

En divisant ensuite par  $A.\sigma.d\varepsilon$ , on aboutit à :

$$0 = \frac{1}{A} \frac{dA}{d\varepsilon} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\dot{\varepsilon}}{d\varepsilon} \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \quad (3.72)$$

Rappelons que la condition d'incompressibilité s'écrit :  $\frac{dA}{A} = -d\varepsilon$

Le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation est défini par :  $m = \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \dot{\varepsilon}}$

On introduit le coefficient d'écrouissage  $\gamma$  :  $\gamma = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\dot{\varepsilon}}$

et le paramètre  $\alpha$  qui permettra de décrire les conditions de l'essai (pilotage en vitesse de déformation ou en vitesse de traverse par exemple) :  $\alpha = \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d\varepsilon}$

A partir des paramètres qu'on vient d'introduire, l'équation 3.72 s'écrit sous la forme :

$$0 = -1 + \gamma + m\alpha \quad (3.73)$$

On va maintenant considérer différentes conditions de chargement de l'essai de traction et examiner l'influence de la vitesse de déformation.

#### Essai de traction à vitesse de déformation constante

Dans ces conditions, le paramètre  $\alpha$  est nul, le critère d'instabilité correspondant au maximum de chargement est alors défini par :

$$\gamma = 1 \Rightarrow \varepsilon = n \quad (3.74)$$

On retrouve ainsi la condition d'instabilité de Considère et on note que le niveau de la vitesse de déformation n'a pas d'effet.

#### Essai de traction à vitesse de traverse constante

A la différence de la première condition, cette deuxième hypothèse est la plus proche des conditions courantes d'un essai de traction. Dans ces conditions, la vitesse de traverse  $dl/dt = \dot{l}$  est constante et la valeur du paramètre  $\alpha = -1$  ; la condition d'instabilité est alors définie par :

$$\gamma = 1 + m \Rightarrow \varepsilon = \frac{n}{1 + m} \quad (3.75)$$

### Essai de traction avec vitesse de réduction de section constante

Une troisième déformation critique peut être associée au maximum de chargement. Elle consiste à imposer un taux de réduction de section  $\dot{A}$  constant. Dans ce cas, le coefficient  $\alpha = 1$  et le critère s'écrit :

$$\gamma = 1 - m \Rightarrow \varepsilon = \frac{n}{1 - m} \quad (3.76)$$

#### 3.4.1.2. Evolution d'un défaut

##### **a. Critère de stabilité**

Dans le paragraphe précédent, les formules ont été établies en supposant une éprouvette homogène. Si maintenant un défaut vient à être introduit, alors l'étude de la stabilité de la déformation consisterait selon Hart [Hart, 1967] à examiner la variation de  $\delta\dot{A}$  en fonction de la variation de la section  $\delta A$  (les définitions des incréments  $\delta$  sont représentées sur la Figure 3.26). Ceci permet de suivre à quelle vitesse la section du défaut est en train d'évoluer par rapport à la section homogène et de définir la stabilité comme :

$$\text{la déformation est stable} : \text{si } \delta\dot{A}/\delta A|_F \leq 0 \quad (3.77)$$

$$\text{la déformation est instable} : \text{si } \delta\dot{A}/\delta A|_F \geq 0$$

Hart considère de la même manière que pour l'équation 3.70, l'incrément de force défini par :

$$\delta F = 0 = \sigma \cdot \delta A + A \cdot \delta \sigma \quad (3.78)$$

Il suppose, en outre, qu'une petite variation de la contrainte est fonction linéaire des variations de  $\varepsilon$  et de  $\dot{\varepsilon}$ , d'où la relation suivante :

$$\delta \sigma = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}} \delta \varepsilon + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_{\varepsilon} \delta \dot{\varepsilon} \quad (3.79)$$

En considérant la déformation réelle  $\varepsilon = -\ln(l/l_0) = \ln(A/A_0)$  (où l'indice 0 fait référence à la section initiale), et après développement limité au premier ordre, l'incrément de déformation est exprimé comme :

$$\delta \varepsilon = -\frac{\delta A}{A} + \frac{\delta A_0}{A_0} \quad (3.80)$$

Dans cet article, Hart [Hart, 1967] n'a pas pris en compte le deuxième terme à droite de l'équation. Cette hypothèse est justifiée par le type de défaut considéré par l'auteur puisqu'il s'agit non pas d'un défaut géométrique mais plutôt d'un défaut de type « coup de marteau » ; on reviendra sur la définition de ce défaut.

L'incrément de la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon} = \dot{l}/l = -\dot{A}/A$  est donné, après développement limité au premier ordre, par :

$$\delta \dot{\epsilon} = -\frac{\delta \dot{A}}{A} + \left( \frac{\dot{A}}{A} \right) \left( \frac{\delta A}{A} \right) \quad (3.81)$$

En combinant les équations (3.78), (3.70), (3.80) et (3.81) et en utilisant les définitions de  $\gamma$  et  $m$ , on obtient :

$$\left. \frac{\delta \ln \dot{A}}{\delta \ln A} \right|_F = \frac{m + \gamma - 1}{m} \quad (3.82)$$

Rappelons que :

$$\frac{\delta \ln \dot{A}}{\delta \ln A} = \frac{\delta \dot{A}}{\delta A} \frac{A}{\dot{A}} \quad (3.83)$$

Comme en traction uni-axiale le terme  $A/\dot{A}$  est négatif, la condition de stabilité (3.77) s'écrit pour une déformation stable :  $\left. \delta \ln \dot{A} / \delta \ln A \right|_F \geq 0$ . Il en découle d'après l'équation (3.82), que l'état stable correspond à :

$$\gamma + m \geq 1 \quad (3.84)$$

### ***b. Evolution de l'inhomogénéité***

Pour suivre la croissance d'une inhomogénéité, il est nécessaire d'exprimer  $\delta A$  en fonction de  $A$ ,  $A_0$  et  $\delta A_0$ . Pour ce faire, on reconsidère l'équation (3.82) en remplaçant la variation  $\delta$  par la différentielle  $d$  [Hart, 1967]. L'équation se réécrit sous une forme similaire :

$$\left. \frac{d \ln \dot{A}}{d \ln A} \right|_F = \frac{m + \gamma - 1}{m} \quad (3.85)$$

Cette équation peut être intégrée entre  $A_0$  et  $A$ , afin de déterminer  $\dot{A}$  en terme de  $A$ ,  $A_0$  et  $\dot{A}_0$ . Lorsque  $\gamma = 0$ , l'équation (3.85) s'intègre sous la forme suivante :

$$\frac{\dot{A}}{\dot{A}_0} = \left( \frac{A_0}{A} \right)^{(1/m)-1} \quad (3.86)$$

où  $A_0$  et  $\dot{A}_0$  représentent respectivement les valeurs initiales de l'aire de la section uniforme et le taux de changement de la section homogène initiale,  $A$  et  $\dot{A}$  les valeurs des mêmes quantités à un instant  $t$ .

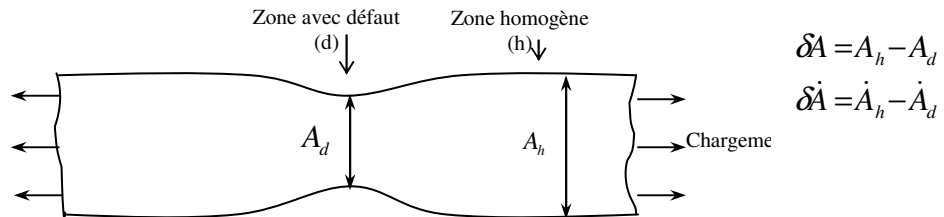


Figure 3.26 : Schéma représentatif d'un défaut préexistant sur une éprouvette de traction.

Pour pouvoir intégrer l'équation (3.86), il est nécessaire de définir la notion de défaut initial  $\delta A_0$ . Dans ce sens, l'approche de Hart ne considère pas le défaut initial comme un défaut géométrique (variation géométrique de la section) mais comme un défaut de type « coup de marteau ». Ceci suppose qu'au niveau du défaut la section varie de la même manière que la section homogène mais avec un retard de  $\delta t$ , en d'autres termes, la courbe d'évolution de la section homogène en fonction du temps  $A(t)$  est applicable pour l'évolution de la section au niveau du défaut mais avec un retard de phase de  $\delta t$ . Dans ces conditions  $\delta A_0 = \dot{A}_0 \delta t$ ,  $\delta A = \dot{A} \delta t$  et :

$$\frac{\delta A}{\delta A_0} = \frac{\dot{A}}{\dot{A}_0} \quad (3.87)$$

Combinée avec l'équation (3.86), l'évolution du défaut s'écrit alors :

$$\delta A = \left( \frac{A_0}{A} \right)^{(1/m)-1} \delta A_0 \quad (3.88)$$

Duncombe [Duncombe, 1972] généralise les résultats de Hart en tenant compte de l'écroutissage ( $\gamma \neq 0$ ). Comme précédemment, l'analyse prévoit qu'une fois l'inhomogénéité instable (i.e  $\gamma + m < 1$ ), elle évolue selon :

$$\delta A = \left( \frac{A_0}{A} \right)^{(1-\gamma-m)/m} \delta A_0 \quad (3.89)$$

Caceres et al. [Caceres et al, 1984] remarquent alors que l'évolution de l'inhomogénéité est principalement contrôlée par le paramètre  $I$  :

$$I = \frac{1-\gamma-m}{m} \quad (3.90)$$

Chung et al. [Chung et al, 2001], [Chung et al, 2002], reprennent ce paramètre qu'ils généralisent ensuite au chargement multiaxial. Ainsi, le facteur de localisation  $I$  est réécrit :

$$I = \begin{cases} \frac{1-g\gamma}{m} - 1 & \text{si } 1-g\gamma-m > 0 \\ 0 & \text{si } 1-g\gamma-m \leq 0 \end{cases} \quad (3.91)$$

avec ( $g = \varepsilon_1 / \bar{\varepsilon}$ ). Le facteur  $I$  conditionne la stabilité de l'écoulement post-uniforme. Pour détecter la striction localisée, les auteurs introduisent le paramètre de rupture suivant :

$$C = \int_0^{\bar{\varepsilon}} J d\bar{\varepsilon} \quad (3.92)$$

Avec :

$$J = \begin{cases} I+1 & \text{si } I+1 > 0 \\ 0 & \text{si } I+1 \leq 0 \end{cases} \quad (3.93)$$

La rupture apparaît lorsque le paramètre  $C$  atteint une valeur critique  $C_{cr}$ . Cette analyse a été appliquée dans le cadre des matériaux superplastiques et a permis la conception de chemins de pression nécessaires à la bonne maîtrise du procédé.

### 3.4.2. Méthode du défaut initial

Alors que l'approche de Hart vise à étudier la stabilité de l'écoulement post-uniforme en modélisant l'évolution d'un défaut de type « coup de marteau », le même problème peut être abordé en considérant, cette fois, un défaut de type défaut géométrique présent dans l'éprouvette au début de la sollicitation. Cette approche s'apparente, bien entendu, à l'approche de Marciniak-Kuczynski, mais elle a été appliquée au cas spécifique de traction uni-axiale par d'autres auteurs [Ghosh-a, 1977], [Hutchinson et al, 1977].

Partant du principe de continuité de l'effort entre la zone de défaut et la zone homogène (Figure 3.26), l'équilibre s'écrit :

$$\sigma_h A_h = \sigma_d A_d \quad (3.94)$$

où l'indice  $h$  fait référence à la zone homogène et l'indice  $d$  à la zone du défaut. Si on suppose une loi d'écrouissage de type puissance ( $\sigma = K \varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m$ ) et en remarquant que  $A = A_0 e^{-\varepsilon}$ , l'équation (3.94) devient :

$$\varepsilon_h^n \dot{\varepsilon}_h^m A_{0h} e^{-\varepsilon_h} = \varepsilon_d^n \dot{\varepsilon}_d^m A_{0d} e^{-\varepsilon_d} \quad (3.95)$$

Partant de la définition de la vitesse de déformation ( $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ ) et en définissant le défaut géométrique par :

$$f_0 = \frac{A_{0h} - \delta A_0}{A_{0h}} = \frac{A_{0d}}{A_{0h}} \quad (3.96)$$

L'intégration de l'équation (3.95) conduit à :

$$\int_0^{\varepsilon_h} \varepsilon_h^{n/m} e^{-\varepsilon_h/m} d\varepsilon_h = f_0^{1/m} \int_0^{\varepsilon_d} \varepsilon_d^{n/m} e^{-\varepsilon_d/m} d\varepsilon_d \quad (3.97)$$

avec

$$\varepsilon_h = \int_0^{\varepsilon_h} d\varepsilon_h \quad \text{et} \quad \varepsilon_d = \int_0^{\varepsilon_d} d\varepsilon_d \quad (3.98)$$

Notons que selon cette équation, la relation entre la déformation homogène  $\varepsilon_h$  et la déformation au niveau du défaut  $\varepsilon_d$  est indépendante de l'histoire du chargement et en particulier elle est indépendante de la vitesse à laquelle l'éprouvette est déformée.

L'intégration par méthode numérique de l'équation (3.97) [Ghosh, 1977-b] a permis de mettre en évidence l'effet des paramètres  $n, m$  et  $f_0$  sur le taux de croissance du défaut géométrique et en particulier l'influence du coefficient  $m$  dont l'augmentation entraîne un ralentissement de la croissance du défaut et donc une amélioration significative de l'écoulement quasi-stable.

Une étude comparative entre le modèle du défaut géométrique et le modèle du défaut « coup de marteau » (i.e modèle de Hart) a été entreprise par [Semiati et al, 1983]. Ayant considéré un matériau avec écrouissage moyen constant (i.e  $\gamma = \bar{\gamma} = cte$ ) au cours de la concentration des déformations, les auteurs ont ensuite intégré les équations (3.89) et (3.97) tout en faisant tendre la déformation au niveau du défaut vers l'infini ( $\varepsilon_d \rightarrow \infty$ ) pour décrire la rupture de l'éprouvette. Ils aboutissent ainsi à la définition d'une expression analytique de la déformation naturelle (i.e  $e = \Delta l/l$ ) totale que peut atteindre une éprouvette soumise à un essai de traction et présentant un défaut initial  $f_0$  :

$$\begin{aligned} \text{Modèle de Hart : } e_h &= (1 - f_0)^{-m/(1-\bar{\gamma})} - 1 \\ \text{Modèle du défaut géométrique : } e_h &= (1 - f_0^{1/m})^{-m/(1-\bar{\gamma})} - 1 \end{aligned} \quad (3.99)$$

Les résultats de prédiction des deux modèles ont été confrontés aux mesures expérimentales rassemblant, pour divers aciers, l'allongement total en traction en fonction du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. L'étude a révélé une bonne prédiction des deux modèles pour les grands coefficients de sensibilité à la vitesse. Cependant, pour les faibles coefficients de sensibilité à la vitesse ( $m < 0.03$ ), le modèle de Hart montre une surestimation des résultats alors que le modèle du défaut géométrique semble sous-estimer les allongements à rupture (Figure 3.27).

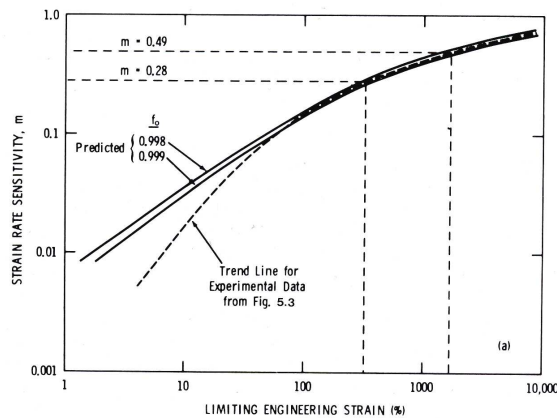


Figure 3.27 : Courbe d'allongement total [Semiati et al, 1983].

### 3.4.3. Approche de Ghosh

Partant du critère de Considère pour l'apparition de la striction diffuse, Ghosh [Ghosh, 1974] a étudié semi analytiquement le processus de localisation de la déformation, le changement de l'état de contrainte qui l'accompagne et l'effet du paramètre d'anisotropie. En considérant la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  dépendante de  $\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \beta$ , et en considérant un certain nombre d'hypothèses, il définit le paramètre de stabilité de l'écoulement  $s$  par :

$$s \propto n(m + 0.005p) \quad (3.100)$$

où :

$$p = \frac{(1+r)^3}{3(1+2r)} \quad (3.101)$$

A partir des équations (3.100) et (3.101), des paramètres  $n, m$  et du coefficient d'anisotropie  $r$ , le paramètre  $s$  peut être calculé et comparé pour divers matériaux. L'auteur a pu mettre en évidence une corrélation directe entre la valeur de ce paramètre et la longueur de la striction sur des éprouvettes en traction, c'est-à-dire sur la stabilité de l'écoulement au-delà de la charge maximale.

Ce modèle a l'avantage de mettre en évidence l'effet des coefficients  $m$  et  $r$  sur la stabilité de l'écoulement ; en particulier, on note une influence du coefficient  $r$ , dont l'augmentation engendre un accroissement de  $s$  et donc une plus grande stabilité de l'écoulement au-delà du chargement maximum.

Plus récemment, Mahmudi [Mahmudi, 1997] a étudié le comportement post uniforme d'alliages d'aluminium en gonflage circulaire. L'auteur retrouve l'influence majeure du coefficient de sensibilité à la vitesse sur le comportement post-uniforme. Dans une moindre mesure, le coefficient d'anisotropie influe sur la stabilité de l'écoulement post-uniforme. L'auteur souligne également que le coefficient de sensibilité à la vitesse est plus élevé en gonflage circulaire qu'en traction.

### **3.4.4. Synthèse**

L'analyse de l'effet de la vitesse de déformation peut se scinder en deux parties :

- La première concerne l'effet de la sensibilité à la vitesse sur l'apparition de la striction diffuse. Sur ce point le modèle de Hart conduit à la condition d'instabilité (3.85). Comme à froid le coefficient de sensibilité à la vitesse est beaucoup plus faible que le coefficient d'écrouissage, la sensibilité à la vitesse a donc un effet de second ordre sur l'apparition de la striction diffuse.
- En revanche, malgré sa faible valeur, le coefficient  $m$  conditionne avant tout la stabilité de la déformation post-uniforme (déformation diffuse) et par conséquent, il conditionne l'apparition de la striction localisée. Les modèles étudiés permettent de quantifier l'effet de la vitesse selon deux approches : la première repose sur l'étude de l'évolution d'un défaut initial (eq 3.99 pour le cas uni-axial et eq. 3.44 pour le cas multiaxial), la deuxième est plus une corrélation entre les paramètres du matériau ( $m, r$ ) et la taille de la striction (3.100).

Aussi bien pour la première que pour la deuxième approche, seul le paramètre  $m$  est pris en compte, et la vitesse de déformation en tant que telle ne semble pas avoir d'influence directe sur ces modèles. Cependant, plusieurs études expérimentales ont montré une influence de la vitesse de déformation sur les courbes limites de formage [Percy, 1980], [Broomhead et al, 1982]. Cette influence est quelque peu contradictoire : si pour [Percy, 1980] l'accroissement de la vitesse de déformation entraîne une diminution des CLF, pour [Broomhead et al, 1982] l'augmentation de la vitesse entraîne une augmentation de la formabilité des matériaux. De même pour [Peixinho et al, 2003], l'augmentation de la vitesse de déformation en traction uni-axiale pour le cas des aciers DP et TRIP entraîne une augmentation de l'allongement à la rupture.

Signalons que ces contradictions sont soulevées pour les très grandes vitesses de déformation où le phénomène d'auto-échauffement plastique peut entrer en jeu en générant un adoucissement du matériau et par conséquent biaiser l'effet de la sensibilité à la vitesse.

### 3.5. Etude du Critère de Force Maximum Modifié (CFMM)

Ce critère a déjà été introduit brièvement au paragraphe § 3.3.1.5. Nous le détaillons ici pour introduire l'effet de la vitesse de déformation et étudier l'influence des critères de plasticité et des chemins de déformation.

#### 3.5.1. Définition du critère

Le critère postule que la striction localisée apparaît lorsque l'effort principal majeur atteint un maximum. La striction est supposée se former suivant la direction perpendiculaire à la direction de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$  (Figure 3.28).

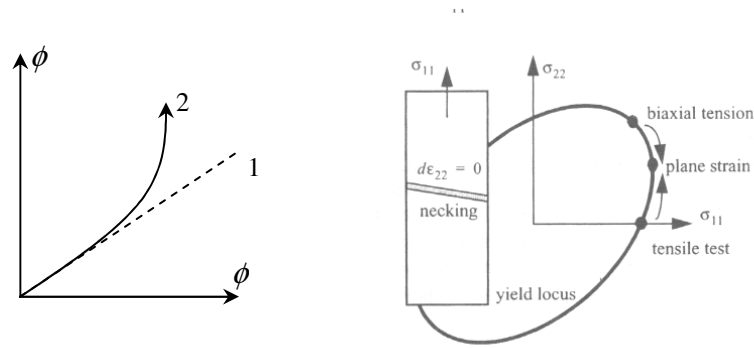


Figure 3.28 : Apparition de la striction localisée selon Hora [Hora, 1996].

La condition de striction est équivalente à celle formulée dans le critère de striction diffuse de Swift (3.5), cette fois écrite suivant la direction des contraintes majeures uniquement :

$$dF_1 = 0 \Rightarrow d(\sigma_1 \cdot l \cdot e) = 0 \quad (3.102)$$

où  $l$  représente la largeur de la bande de striction,  $e$  son épaisseur.

En développant cette équation et en divisant par  $\sigma_1 \cdot l \cdot e$ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0 \quad (3.103)$$

D'après l'hypothèse d'incompressibilité plastique, on a :

$$d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = -d\epsilon_1 \quad (3.104)$$

En combinant les équations (3.103) et (3.104), on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1} = \sigma_1 \quad (3.105)$$

Cette équation définit l'instant d'apparition de la striction. La forme générale du critère d'instabilité s'exprime par:



$$\begin{aligned} dF_1 > 0 &\Rightarrow \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} > \sigma_1 : \text{état stable.} \\ dF_1 \leq 0 &\Rightarrow \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} \leq \sigma_1 : \text{état instable.} \end{aligned} \quad (3.106)$$

D'après les auteurs [Hora et al, 1996], l'apparition de la bande de striction est forcément accompagnée d'un changement de l'état de déformation qui va évoluer de son état de déformation homogène courant vers un état de déformation plane correspondant à l'état de striction. Ce changement entraînera un écrouissage supplémentaire au niveau de la bande de striction (Figure 3.28). Pour en tenir compte, la contrainte principale majeure est alors exprimée en fonction de la déformation majeure  $\varepsilon_1$ , mais également du chemin de déformation  $\beta$  :

$$\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \beta) \quad (3.107)$$

C'est cette écriture qui a été suggérée initialement, elle a été appliquée par [Knockaert, 2001] pour la prédiction des CLF de certains aciers doux. Les résultats ont révélé que le critère montrait une tendance à sous-estimer les CLF expérimentales des aciers. Cet écart est en partie attribué aux effets de la vitesse de déformation.

Afin d'améliorer les prédictions du modèle, nous proposons d'intégrer l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation dans l'expression du critère. Pour ce faire, on reconsidère l'équation (3.107) en rajoutant la vitesse de déformation équivalente comme variable supplémentaire décrivant l'état de la contrainte principale majeure:

$$\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \beta, \dot{\varepsilon}) \quad (3.108)$$

La condition d'instabilité de l'effort (3.105) est alors réécrite :

$$dF_1 \leq 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1}}_{\text{striction diffuse}} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\varepsilon_1}}_{\text{effet du chemin de déformation}} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_1}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{d\dot{\varepsilon}}{d\varepsilon_1}}_{\text{effet de la vitesse}} \leq \sigma_1 \quad (3.109)$$

- La striction diffuse :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} \quad (3.110)$$

-Effet du chemin de déformation :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\varepsilon_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\varepsilon_1} \quad (3.111)$$

Afin d'explicitier une écriture générale de l'équation (3.109), on fait appel à l'hypothèse de la linéarité locale [Brunet, 1998] qui suppose que  $\beta$  peut être approchée par  $\beta = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$  alors que par définition  $\beta = d\varepsilon_2 / d\varepsilon_1$ . Cette hypothèse permet d'écrire :

$$\frac{d\beta}{d\varepsilon_1} = \frac{d}{d\varepsilon_1} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) = -\frac{\beta}{\varepsilon_1} \quad (3.112)$$

- Le terme correspondant à l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation est développé selon :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{d\dot{\varepsilon}}{d\varepsilon_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{d\dot{\varepsilon}}{d\varepsilon_1} \quad (3.113)$$

Où la dérivée  $\partial \dot{\varepsilon} / \partial \bar{\varepsilon}$  peut être exprimée comme :

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \bar{\varepsilon}} = \frac{\frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial t}}{\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t}} = \frac{\ddot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}} \quad (3.114)$$

On rappelle les fonctions  $\beta, \Omega, \mathbf{f}, g$  utiles pour définir une écriture générale du CFMM :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}, \quad \Omega(\beta) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \\ d\bar{\varepsilon} &= \frac{d\varepsilon_1}{g(\beta)} \Rightarrow \frac{d\varepsilon_1}{d\bar{\varepsilon}} = g(\beta) \\ \sigma_1 &= f(\Omega)\bar{\sigma} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} = \mathbf{f}(\Omega) \end{aligned} \quad (3.115)$$

En combinant les équations (3.109 - 3.115), le critère est donné par :

$$h(\bar{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}) + k(\bar{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}) \cdot \frac{\ddot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}} \leq g(\beta) \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \mathbf{f}(\Omega)}{\partial \Omega}}{\mathbf{f}(\Omega)} \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \frac{\beta}{\varepsilon_1} \right] \bar{\sigma} \quad (3.116)$$

Les fonctions  $h, k$  sont définies pour une loi de type puissance ( $\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n \dot{\varepsilon}^m$ ) comme :

$$\begin{aligned} h(\bar{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}) &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} = n \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} \\ k(\bar{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}) &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\varepsilon}} = m \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.117)$$

Le critère peut s'écrire alors sous la forme :

$$\frac{n}{\bar{\varepsilon}} + m \frac{\ddot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}^2} \leq g(\beta) \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \mathbf{f}(\Omega)}{\partial \Omega}}{\mathbf{f}(\Omega)} \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \frac{\beta}{\varepsilon_1} \right] = K(\beta, \bar{\varepsilon}) \quad (3.118)$$

### 3.5.1.1. Expression du modèle pour un critère de von Mises

Le calcul des fonctions  $\beta, \mathbf{f}, g$  est déduit à partir de l'expression du critère de plasticité.

Le critère isotrope de von Mises s'exprime en contraintes planes par :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (3.119)$$

à partir duquel on déduit une expression de la fonction  $\mathbf{f}$  :

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega + \Omega^2}} \quad (3.120)$$

La loi d'écoulement permet d'écrire :

$$\begin{aligned} d\epsilon_1 &= d\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} = d\lambda \frac{1}{\bar{\sigma}} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) \\ d\epsilon_2 &= d\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} = d\lambda \frac{1}{\bar{\sigma}} \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.121)$$

On peut donc déduire une expression de  $\beta$  en fonction de  $\Omega$  :

$$\beta = \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} = \frac{2\Omega - 1}{2 - \Omega} \quad (3.122)$$

Une expression générale de la fonction  $g$  (3.115) peut être déterminée à partir de l'équation du travail plastique équivalent :

$$\bar{\sigma} \cdot d\bar{\epsilon} = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 \quad (3.123)$$

La fonction  $g$  est alors donnée par :

$$g = \frac{1}{\mathbf{f} \cdot (1 + \beta\Omega)} \quad (3.124)$$

### 3.5.1.2. Expression du CFMM pour un critère de Hill48

De la même façon que pour le critère de von Mises, on détermine les fonctions  $\beta, \mathbf{f}, g$  pour le critère quadratique de Hill48.

L'expression du critère de Hill48 en supposant que le repère des contraintes principales est confondu avec les axes du matériau, est donnée par:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(G + H)\sigma_1^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 + (F + H)\sigma_2^2} \quad (3.125)$$

On en déduit une expression de la fonction  $\mathbf{f}$  :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{(G + H) - 2H\Omega + (F + H)\Omega^2}} \quad (3.126)$$

Le rapport des déformations  $\beta$  est calculé en fonction de  $\Omega$  :

$$\beta = \frac{(F + H)\Omega - H}{(G + H) - H\Omega} \quad (3.127)$$

$g$  est calculée en utilisant (3.124).

### 3.5.1.3. Expression du CFMM pour un critère de Hosford(1979)

En supposant que le repère des contraintes principales est confondu avec le repère du matériau, le critère de Hosford(1979) s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{r_0}{1+r_0} |\sigma_2|^a + \frac{r_{90}}{1+r_0} |\sigma_1|^a + \frac{r_0 r_{90}}{1+r_0} |\sigma_1 - \sigma_2|^a \right]^{\frac{1}{a}} \quad (3.128)$$

L'expression de la fonction  $f$  est donnée par :

$$\frac{f}{\bar{\sigma}} = \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \left[ \frac{r_0}{1+r_0} |\Omega|^a + \frac{r_{90}}{1+r_0} + \frac{r_0 r_{90}}{1+r_0} |1-\Omega|^a \right]^{\frac{1}{a}} \quad (3.129)$$

le rapport des déformations  $\beta$  :

$$\beta = \frac{r_0 |\Omega|^{a-1} - r_0 r_{90} |1-\Omega|^{a-1}}{r_{90} + r_0 r_{90} |1-\Omega|^{a-1}} \quad (3.130)$$

$g$  est calculée en utilisant (3.124).

### 3.5.2. Interprétation graphique du CFMM pour un matériau sans sensibilité à la vitesse de déformation

Lorsque le comportement du matériau est indépendant de la vitesse de déformation, le coefficient  $m$  est alors nul. Le terme lié à la vitesse de déformation dans l'équation (3.118) est par conséquent identiquement nul. Le critère s'écrit alors :

$$\frac{n}{\bar{\epsilon}} = g(\beta) \left[ 1 + \frac{\frac{\partial f(\Omega)}{\partial \Omega}}{f(\Omega)} \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \frac{\beta}{\epsilon_1} \right] = K(\beta, \bar{\epsilon}) \quad (3.131)$$

Pour un chemin de déformation défini par la variable  $\beta$ , la déformation à striction correspond au point d'intersection des deux courbes suivantes: la première courbe décrit le terme à gauche de l'équation ( $n/\bar{\epsilon}$ ), la deuxième courbe définit le terme à droite de l'équation qu'on note par la fonction  $K(\beta, \bar{\epsilon})$ .

Sur la Figure 3.29 la fonction ( $n/\bar{\epsilon}$ ) est représentée par la courbe en rouge, la fonction  $K$  est représentée par les trois courbes en bleu correspondant à trois chemins de déformation différents ( $\beta = \{0, -0.5, 1\}$ ). Pour chaque valeur de  $\beta$ , le point d'intersection de la courbe  $K$  avec la courbe de la fonction ( $n/\bar{\epsilon}$ ) correspond à la déformation équivalente limite associée au chemin en question.

Signalons que la Figure 3.29 a été tracée pour un critère de von Mises et une loi d'écrouissage de type puissance. Le principe de ce graphe reste, par ailleurs, valable pour tout autre type de critère de

plasticité et de loi d'écroutissage. A noter que la loi d'écroutissage influe sur la forme et la position de la courbe rouge sans modifier les fonctions  $K$ , alors que l'expression du critère de plasticité conditionne la forme et la position des courbes de la fonction  $K$ . Ainsi, nous pouvons comparer sur la Figure 3.30 les courbes associées à la fonction  $K$  et correspondant à un critère non quadratique isotrope de Hosford (1979).

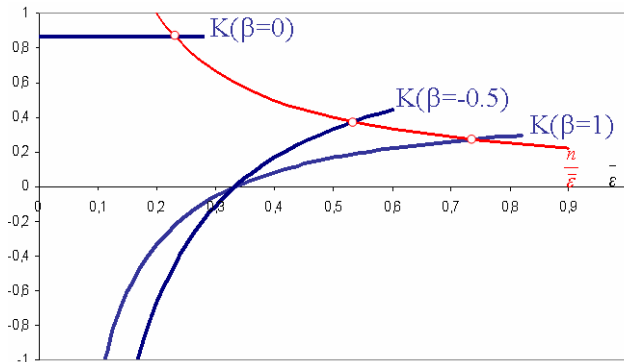


Figure 3.29 : Interprétation graphique du critère de FMM avec un critère de plasticité de von Mises.

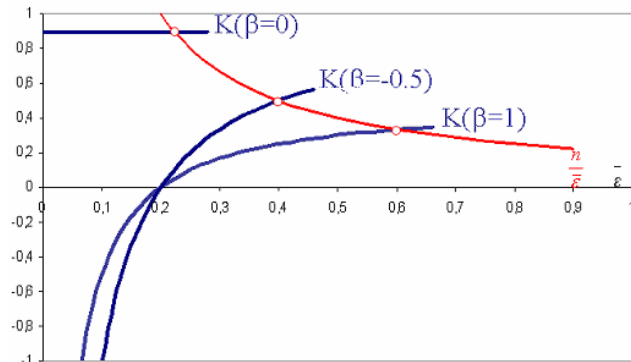


Figure 3.30 : Interprétation graphique du critère de FMM avec un critère de plasticité isotrope de Hosford ( $a=6$ ).

### 3.5.3. Effet du critère de plasticité

#### 3.5.3.1. Modèle M-K

Les premiers travaux de Paramar et al [Paramar et al, 1978], portant sur l'effet de l'anisotropie sur les prédictions des CLF par un modèle M-K, ont montré une forte influence du coefficient de Lankford sur la forme de la CLF en expansion. Cependant, les observations expérimentales de Ghosh [Ghosh,1975] ont révélé que le coefficient  $r$  n'a que peu d'effet sur ces CLF.

Depuis, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de l'influence du critère de plasticité sur la prédiction des courbes limites de formages ([Xu et al, 2000], [Friedman et al, 2000] ...).

En partant d'un modèle de striction de type Marciniak, Xu et al [Xu et al, 2000] ont considéré trois critères de plasticité distincts (Hill48, Hill78, Hill93). En faisant varier le coefficient d'anisotropie normale  $r$ , ils identifient les paramètres de chacun des trois critères de plasticité qu'ils utilisent ensuite dans le modèle de striction M-K. Les auteurs ont ainsi montré que les CLF calculées sont très peu influencées par la variation du coefficient d'anisotropie  $r$  lorsqu'il s'agit du critère non quadratique de Hill93. Par contre, lorsqu'il s'agit du critère quadratique de Hill48, les CLF semblent être fortement influencées par la variation du paramètre  $r$ . En outre, les auteurs soulignent que le point limite en déformation plane est inchangé quelque soit le type du critère et les paramètres associés.

Les mêmes conclusions sont retrouvées par Friedman et al [Friedman et al, 2000] soulignant que les prédictions du modèle de M-K sont quasi indépendantes de la variation du paramètre d'anisotropie  $r$  dans le cas du critère non quadratique de Hosford(1979), alors qu'elles sont fortement influencées par l'anisotropie pour le critère quadratique de Hill48 (Figure 3.31).

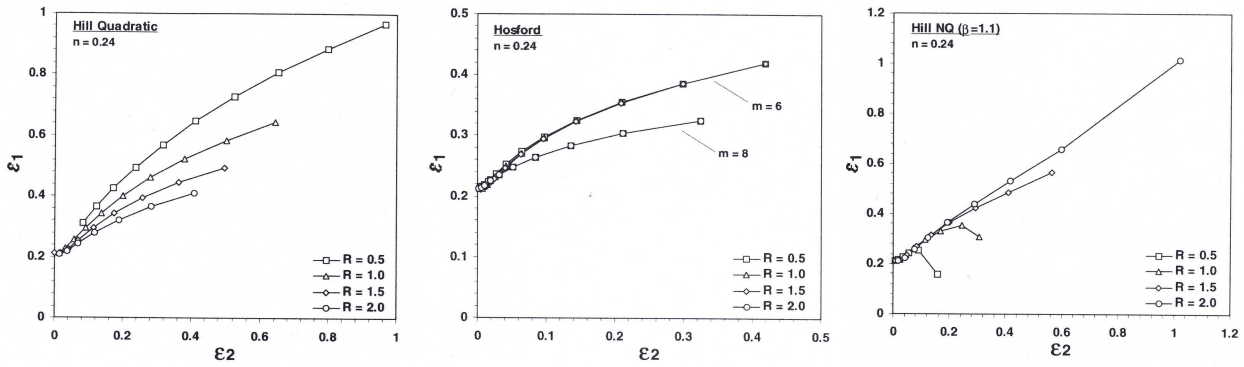


Figure 3.31: influence du paramètre d'anisotropie  $r$  sur les prédictions du modèle M-K pour trois critères de plasticité anisotropes [Friedman et al, 2000].

Afin de mieux comprendre la relation entre le calcul des CLF (pour le modèle M-K) et les critères de plasticité, considérons l'évolution de l'état de contrainte d'un point matériel (B) situé au niveau du défaut, et un deuxième point (A) situé dans la zone de déformation homogène du modèle géométrique de M-K (Figure 3.32-a). Au cours du chargement, le point (B) va subir un changement de son état de déformation pour évoluer vers un état de déformation plane marquant ainsi le début de la localisation de déformation (Figure 3.32). Le chemin parcouru par le point (B) entre l'état homogène et le point d'apparition de la striction dépend fortement de la forme de la surface de charge du matériau et en particulier de la position relative de l'état de déformation plane sur la surface de charge (Figure 3.32-b).

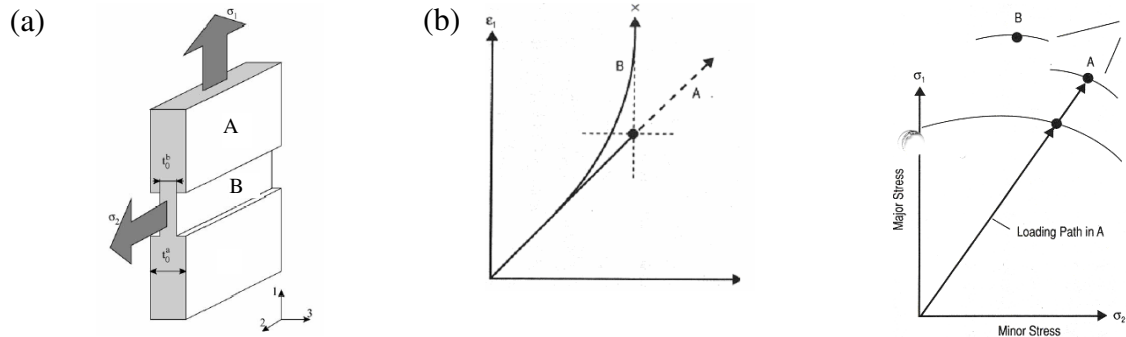


Figure 3.32 : Evolution de l'état de contrainte au niveau de la zone homogène et la zone du défaut pour un modèle M-K [Hosford et al, 1999].

Examinons à présent l'effet du coefficient d'anisotropie  $r$  sur la forme de la surface de charge. A cet effet, sur la Figure 3.33 ont été portés les tracés de trois critères de plasticité (Hill48, Hosford(1979), Hill non quadratique). Pour chacun des critères, la variation du coefficient  $r$  influe sur la position relative de l'état de déformation plane sur la surface de charge (marquée par des flèches sur la Figure 3.33). On voit, en particulier, que pour le critère quadratique de Hill48 la position de l'état de déformation plane sur la surface est largement influencée par la variation de  $r$ . Pour le critère non quadratique de Hill, on note une influence moins prononcée. Enfin, concernant le critère non quadratique de Hosford(1979), on remarque que l'état de déformation plane est parfaitement indépendant du coefficient d'anisotropie. En projetant ces observations sur les résultats de la Figure 3.31, on peut ainsi expliquer la dépendance des CLF au paramètre  $r$  par les effets de ce dernier sur la position relative de l'état de déformation plane sur la surface de charge.

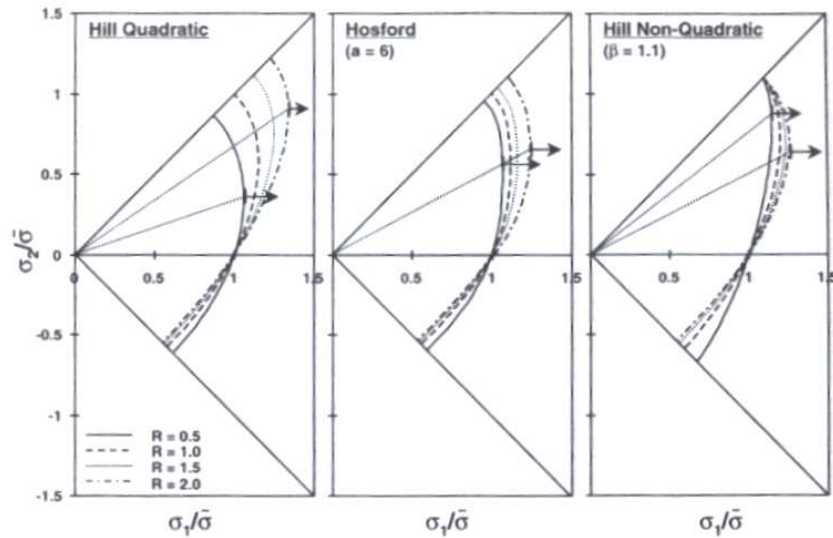


Figure 3.33 : Evolution de l'état de déformation plane en fonction du coefficient d'anisotropie pour trois critères de plasticité anisotropes [Friedman et al, 2000].

Manifestement, la position relative de l'état de déformation plane revêt une importance majeure dans l'étude des effets de l'anisotropie, c'est pourquoi certains auteurs ont proposé des paramètres descriptifs de cet état de chargement. Ainsi, Barlat [Barlat, 1987] a introduit le ratio de la contrainte plane par la contrainte bi-axiale  $\alpha_p = \sigma_p / \sigma_b$  (Figure 3.34-a). D'une manière analogue, Friedman [Fiedman, 2000] a introduit l'angle  $\theta$  pour décrire l'écart entre la contrainte équi-biaxiale et la contrainte plane (Figure 3.34-b). A noter par ailleurs, que  $\alpha_p$  peut faire office d'un paramètre décrivant l'anisotropie du matériau en expansion, tout comme  $r$  décrit l'anisotropie en rétreint.

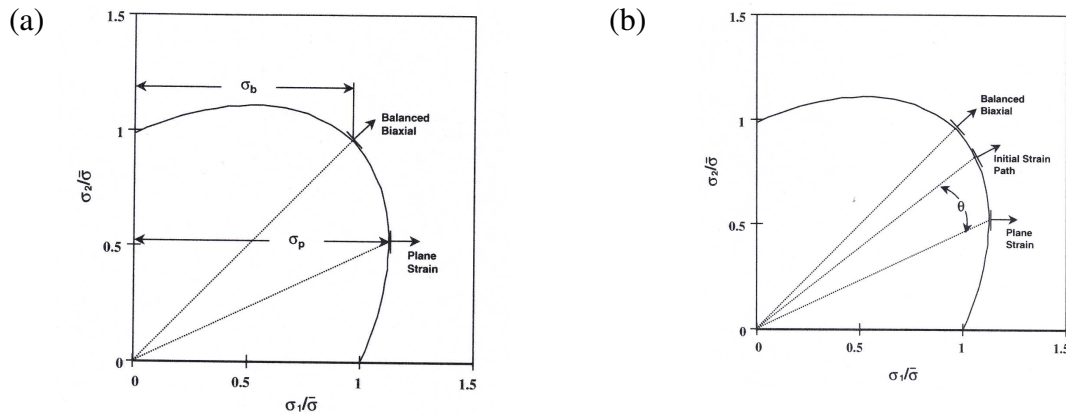


Figure 3.34 : Représentation graphique :a) du paramètre de Barlat  $\alpha_p$   
b) de l'angle  $\theta$  [Friedman et al, 2000].

### 3.5.3.2. CFMM

On s'est intéressé aux effets des critères de Hill48 et de Hosford(1979) sur les prédictions du CFMM. La Figure 3.35 montre qu'on retrouve les mêmes tendances que pour le modèle M-K, à savoir une forte influence du coefficient d'anisotropie sur les CLF lorsqu'il s'agit du critère de Hill48 et une influence négligeable de ce même paramètre dans le cas du critère non quadratique de Hosford(1979).

A la différence du modèle M-K, où l'état de déformation au niveau du défaut évolue au cours du chargement pour atteindre un état de déformation plane, pour le critère CFMM les chemins de déformation demeurent linéaires tout au long du chargement. L'explication proposée par Hora (Figure 3.28) permet de schématiser le processus physique de la localisation de déformation mais à aucun moment, le changement de l'état de déformation ne semble être pris en considération dans la formulation du modèle. Ceci ne remet pas en cause la validité du modèle, cependant, cela permet de conclure qu'on ne peut pas attribuer les effets observés (Figure 3.35) à l'hypothèse du changement du chemin de déformation comme c'est le cas pour le modèle M-K.

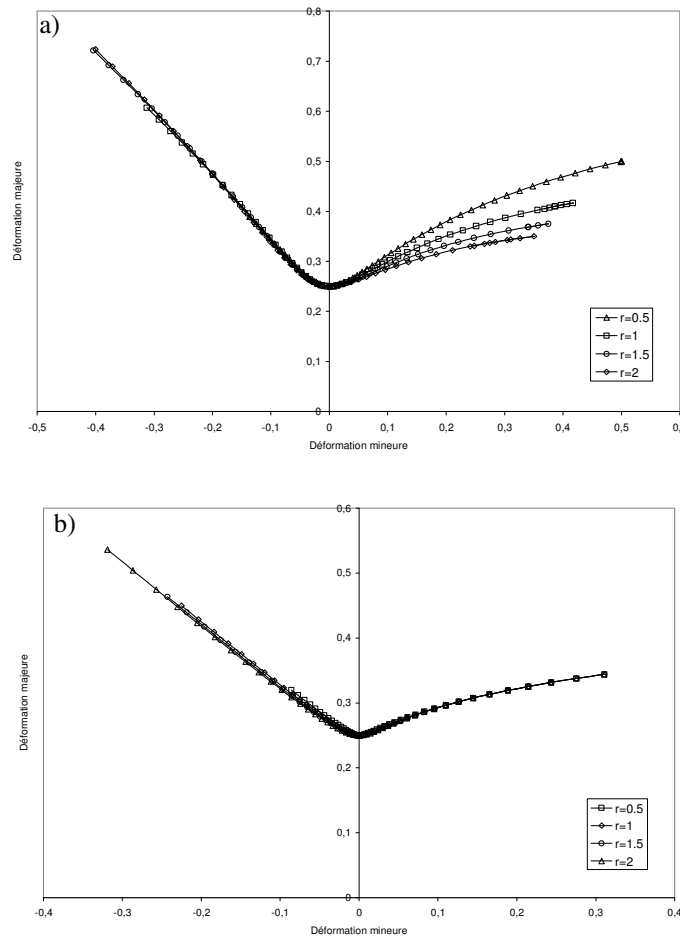


Figure 3.35 : Prédiction des CLF par le modèle FMM en anisotropie normale:  
a) pour un critère de Hill48 ; b) pour un critère de Hosford(1979).

Afin d'apporter une interprétation à ce constat, on a développé en annexe B l'expression des différentes fonctions intervenant dans le calcul du critère (3.131). On aboutit au final à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_I(\Omega) &= \left[ n - \frac{\Omega \mathbf{f}'^3 + \mathbf{f} \mathbf{f}'^2}{\mathbf{f}'' \mathbf{f}^2 - 2 \mathbf{f} \mathbf{f}'^2} \right] \\ \varepsilon_{II}(\Omega) &= \frac{-\mathbf{f}'}{\Omega \mathbf{f}' + \mathbf{f}} \left[ n - \frac{\Omega \mathbf{f}'^3 + \mathbf{f} \mathbf{f}'^2}{\mathbf{f}'' \mathbf{f}^2 - 2 \mathbf{f} \mathbf{f}'^2} \right] \end{aligned} \quad (3.132)$$



Nous rappelons que la fonction  $\mathbf{f}$  est associée à l'équation de la surface de charge :  $\mathbf{f} = \bar{\sigma}/\sigma_1$ .

Par ailleurs, dans l'expression (3.132) il est très intéressant de noter que la déformation limite est définie par les valeurs *locales* des fonctions  $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$  et  $\mathbf{f}''$ . Celles-ci sont associées aux paramètres géométriques locaux suivants (Figure 3.36):

- $\Omega$  angle polaire,
- $\mathbf{f}$  rayon vecteur,
- $\mathbf{f}'$  la normale locale,
- $\mathbf{f}''$  rayon de courbure local.

Si on revient à la géométrie du critère de Hill48 et celle du critère de Hosford (Figure 3.33), on remarque que le coefficient d'anisotropie  $r$  influe sur la forme locale de la surface de charge pour le critère de Hill48 alors que la forme du critère de Hosford est quasi inchangée par la variation de  $r$ . Ceci permet donc d'expliquer les observations de la Figure 3.35 relatives aux effets de l'anisotropie sur les prédictions du CFMM.

Par ailleurs, étant donné que les prédictions du CFMM sont conditionnées par la forme locale de la surface de charge, les paramètres  $\alpha_p, \theta$  introduits pour décrire l'écartement entre l'état de déformation plane et l'état de déformation équi-biaxiale perdent donc de leur utilité étant donnée leur attribution globale.

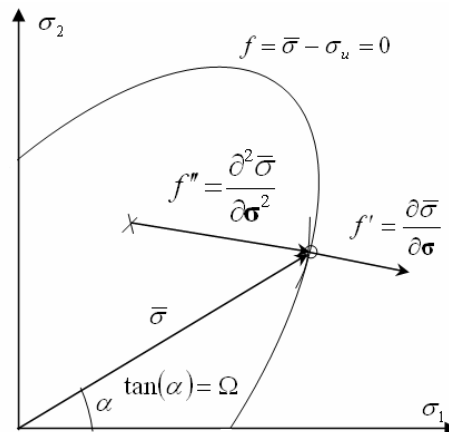


Figure 3.36 : Paramètres géométriques d'une surface de charge.

### 3.5.4. Effet du chemin de déformation

Aujourd'hui, il est bien connu que le chemin de déformation influe considérablement sur la position de la courbe limite de formage. Les premières observations expérimentales de [Kleemola, 1977], [Gronostajski, 1984] et plus récemment les travaux de [Graf et al, 1993-a], [Graf et al, 1993-b] sur l'aluminium 2008-T4 ainsi que plusieurs autres travaux ont montré qu'une pré-déformation en rétreint tend à déplacer les CLF vers le haut et vers le domaine de rétreint, alors qu'une pré-déformation en expansion induirait une réduction de la formabilité du matériau en déplaçant sa CLF vers le bas et vers le domaine d'expansion. Ces résultats sont illustrés sur la Figure 3.37 par les observations expérimentales d'Arrieux [Arrieux, 1990].

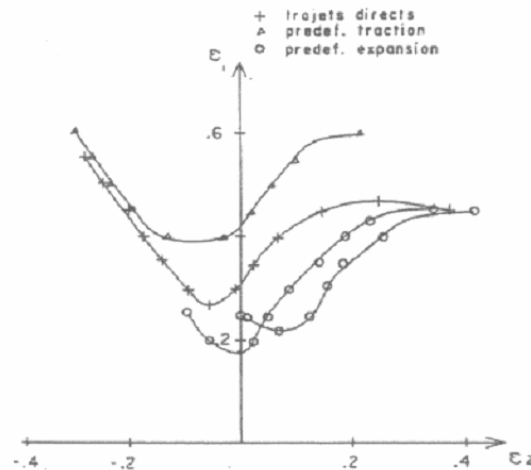


Figure 3.37 : Effet du chemin de déformation sur les CLF [Arrieux, 1990].

D'un autre côté, la production d'une pièce industrielle nécessite généralement plusieurs passes et donc des chemins de déformation fortement non linéaires.

Comme il existe une infinité de possibilités de chemin non linéaires, il apparaît irréalisable de définir une CLF expérimentale à chaque type de chemin de déformation. Face à ces limitations, deux approches sont envisageables : la première consiste à s'orienter vers le développement de critères analytiques et à s'assurer de leurs capacités à reproduire l'effet de dépendance au chemin de déformation. Dans ce sens, le modèle M-K a été largement étudié et a montré cette aptitude [Graf et al, 1993-b], également le critère de perturbation [Boudeau et al, 2000] et le CFMM [Hora et al, 1996].

La deuxième approche reconsidère l'espace de représentation des CLF. Arrieux [Arrieux, 1990] a ainsi montré qu'une représentation dans l'espace des contraintes principales permettait d'éliminer la dépendance au chemin (Figure 3.38).

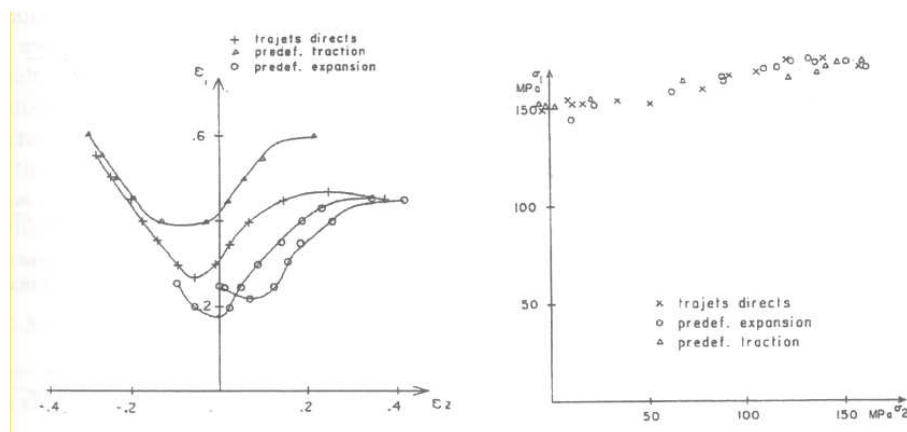


Figure 3.38 : Représentation des CLF dans l'espace des contraintes [Arrieux, 1990].

On se propose dans la suite d'expliquer la dépendance des prédictions du CFMM au chemin de déformation et d'en tirer quelques conclusions intéressantes relatives à l'espace de représentation des CLF.

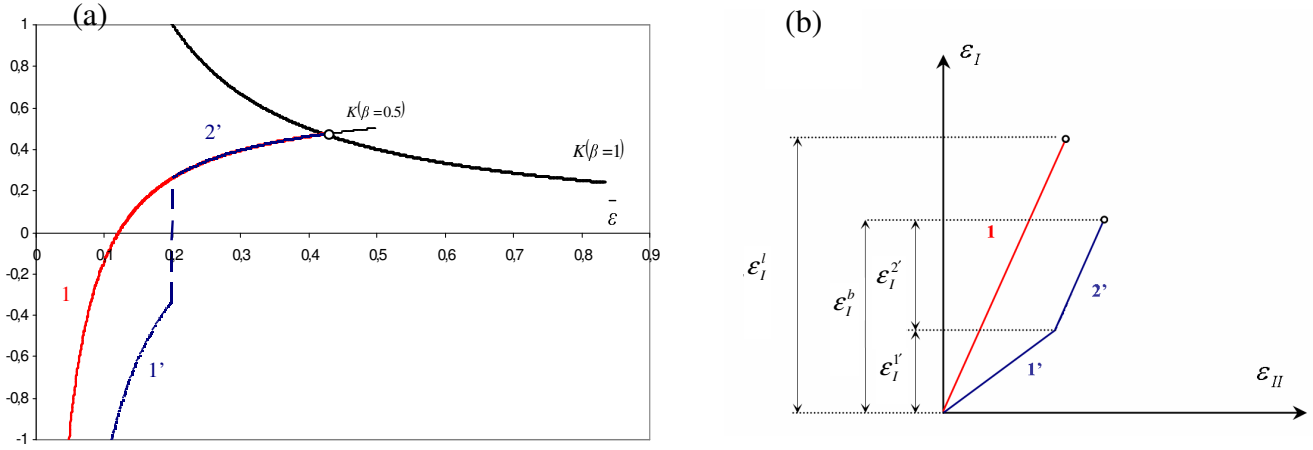


Figure 3.39 : Interprétation graphique de l'effet d'un chemin bilinéaire sur la prédiction de la déformation limite par le critère CFMM [Ben Tahar et al, 2004].

Pour ce faire, prenons l'exemple d'un chemin de déformation en expansion défini par le rapport  $\beta = 0.5$ . Notre objectif est de comparer la déformation limite pour un chemin linéaire et bilinéaire. Pour un chemin linéaire ( $\beta = 0.5$ ) illustré sur la Figure 3.39-a par le trajet n°1, la déformation limite correspond à l'intersection de ce trajet avec la courbe représentative de la fonction d'écrouissage comme on l'a exposé au paragraphe §5.1. On notera par  $\bar{\epsilon}^l$  la déformation équivalente limite pour ce chemin linéaire et par  $\epsilon_I^l$  la déformation majeure limite correspondante (Figure 3.39-b).

A présent, on va considérer le chemin bilinéaire. On choisit une pré-déformation en traction équi-biaxiale  $\beta = 1$  (représentée par le chemin 1' sur la Figure 3.39-a) jusqu'à une déformation équivalente  $\bar{\epsilon}^{1'}$ ; ensuite, on revient au chemin de déformation correspondant à  $\beta = 0.5$  (ceci est illustré par le saut, sur la Figure 3.39-a, pour passer du chemin 1' au chemin 2').

$\bar{\epsilon}^{2'}$  dénotera la déformation équivalente que subit le matériau durant le second chemin de déformation (2'). La déformation équivalente totale  $\bar{\epsilon}^b$  pour le chemin bilinéaire est donc donnée par :  $\bar{\epsilon}^b = \bar{\epsilon}^{1'} + \bar{\epsilon}^{2'}$ . On notera par  $\epsilon_I^b$  la déformation majeure limite pour le chemin bilinéaire et exprimée comme :  $\epsilon_I^b = \epsilon_I^{1'} + \epsilon_I^{2'}$  (Figure 3.39-b).

D'après la représentation de la Figure 3.39-a, la déformation équivalente limite est la même aussi bien pour le chemin linéaire que pour le chemin bilinéaire ; il s'ensuit donc :

$$\bar{\epsilon}^l = \bar{\epsilon}^b = \bar{\epsilon}^{1'} + \bar{\epsilon}^{2'} \quad (3.133)$$

Comme les chemins sont linéaires, et en tenant compte de l'équation (3.115), il est possible de remplacer l'équation (3.133) par :

$$\frac{\epsilon_I^l}{g(0.5)} = \frac{\epsilon_I^{1'}}{g(1)} + \frac{\epsilon_I^{2'}}{g(0.5)} \quad (3.134)$$

Ce qui revient à :

$$\varepsilon_I^l = \frac{g(0.5)}{g(1)} \varepsilon_I^{1'} + \varepsilon_I^{2'} \quad (3.135)$$

Afin d'évaluer le rapport  $g(0.5)/g(1)$ , on trace sur la Figure 3.40 l'évolution de la fonction  $g$  associée au critère de von Mises (3.124). On note que le rapport  $g(0.5)/g(1)$  est supérieur à 1, ce qui conduit à la relation suivante:

$$\varepsilon_I^l = \frac{g(0.5)}{g(1)} \varepsilon_I^{1'} + \varepsilon_I^{2'} > \varepsilon_I^{1'} + \varepsilon_I^{2'} = \varepsilon_I^b \quad (3.136)$$

L'équation (3.136) montre donc que pour  $\beta = 0.5$  la déformation majeure limite pour un chemin bilinéaire est inférieure à celle d'un chemin linéaire. Ce résultat peut être étendu pour tous les chemins du domaine ( $-0.5 \leq \beta \leq 1$ ) puisque la relation  $g(\beta)/g(1) > 1$  reste valable (Figure 3.40). Ainsi, on arrive à expliquer la décroissance de la CLF pour une pré-déformation en expansion.

Pour des pré-déformations en traction, la même approche reste valable sauf que cette fois le rapport  $g(\beta)/g(-0.5)$  est inférieur à 1 (Figure 3.40). L'inéquation (3.136) est alors inversée conduisant ainsi à un accroissement de la CLF pour des pré-déformations en rétreint.

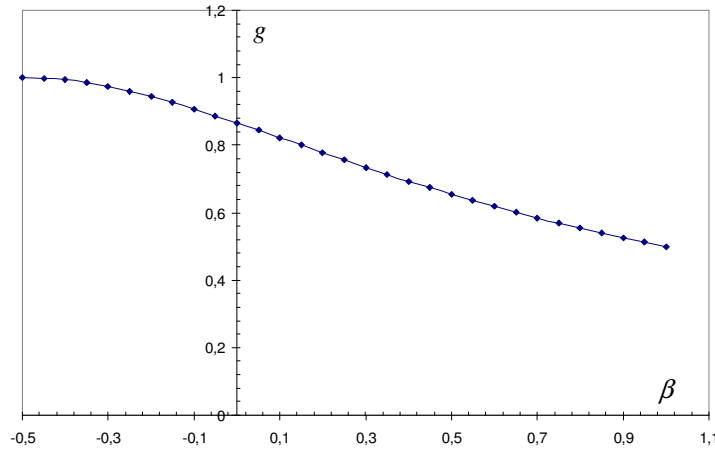


Figure 3.40 : Evolution de la fonction  $g = d\varepsilon_I/d\bar{\varepsilon}$  pour un critère de von Mises.

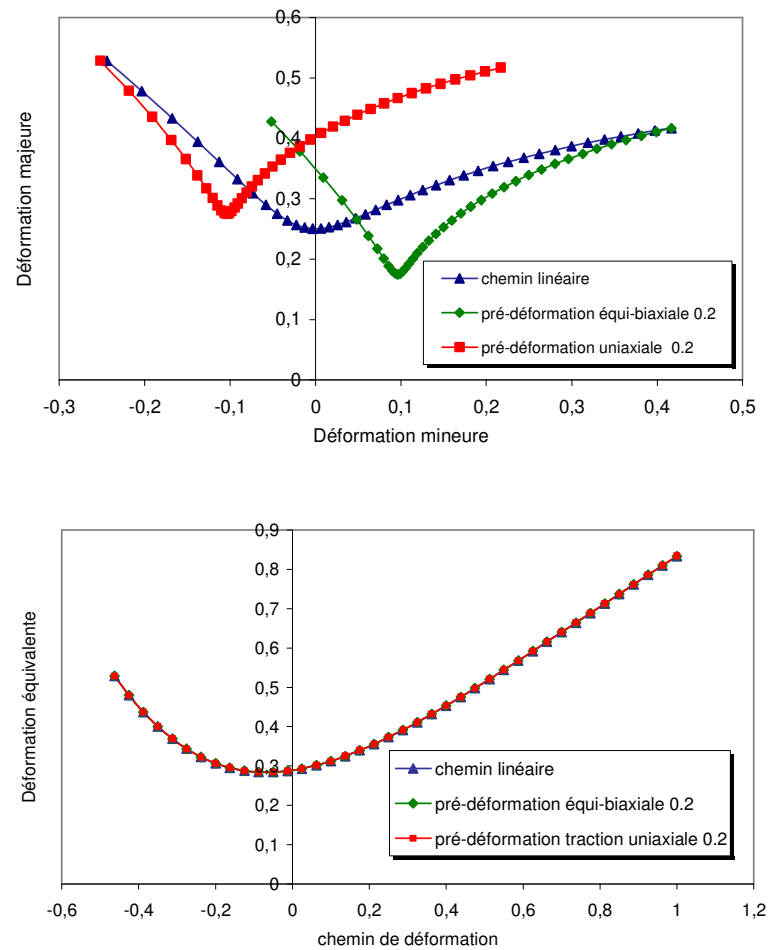


Figure 3.41 : Représentation des prédictions des CLF par le critère CFMM pour un critère de von Mises avec différents chemins de chargement.

Dans l'approche précédente, on a pu montrer que la déformation équivalente limite était la même pour le chemin linéaire et pour le chemin bilinéaire (3.133). Ceci est justifié par la représentation graphique du critère de striction dans laquelle la déformation équivalente limite est déterminée par l'unique connaissance du chemin de déformation en fin de chargement (le deuxième trajet de chargement pour un chemin bilinéaire). Donc, indépendamment du trajet de chargement suivi, seul l'état de déformation instantané conditionne l'apparition de la striction, l'histoire du chargement est quant à elle « stockée » dans la déformation équivalente. De ce fait, puisqu'à chaque chemin correspond une déformation équivalente limite unique, une représentation de la CLF dans l'espace défini par  $(\beta, \bar{\epsilon})$  serait plus appropriée et permettrait d'éliminer l'effet de dépendance au chemin de déformation. Nous illustrons sur la Figure 3.41 les effets des pré-déformations sur les prédictions des CLF par le CFMM dans l'espace des déformations principales et dans l'espace des déformations équivalentes. On vérifie bien que la dépendance au chemin de déformation observée dans l'espace des déformations principales n'est plus visible dans l'espace  $(\beta, \bar{\epsilon})$ .

Sur la Figure 3.42-a, sont reportés les résultats des mesures expérimentales de [Graf et al, 1993] sur un alliage d'aluminium. La Figure 3.42-b montrent que le critère est en mesure de reproduire qualitativement les effets du chemin de déformation sur les CLF.

Nous remarquons sur la Figure 3.42-c que pour une prédéformation en traction uniaxiale ou en traction équi biaxiale la courbe limite dans l'espace des déformations équivalentes coïncide avec la CLF directe tant que la prédéformation équivalente ne dépasse pas  $\approx 0.3$ . Au-delà de cette valeur, la striction apparaît à la même déformation critique pour tous les chemins directs ayant une déformation équivalente limite inférieure à celle de la prédéformation. Ceci se traduit par des lignes horizontales. Ces résultats montrent le caractère intrinsèque des CLF définies dans l'espace des déformations équivalentes  $(\beta, \bar{\epsilon})$ . Seules des niveaux de déformation élevés entraînent la perte de cette propriété.

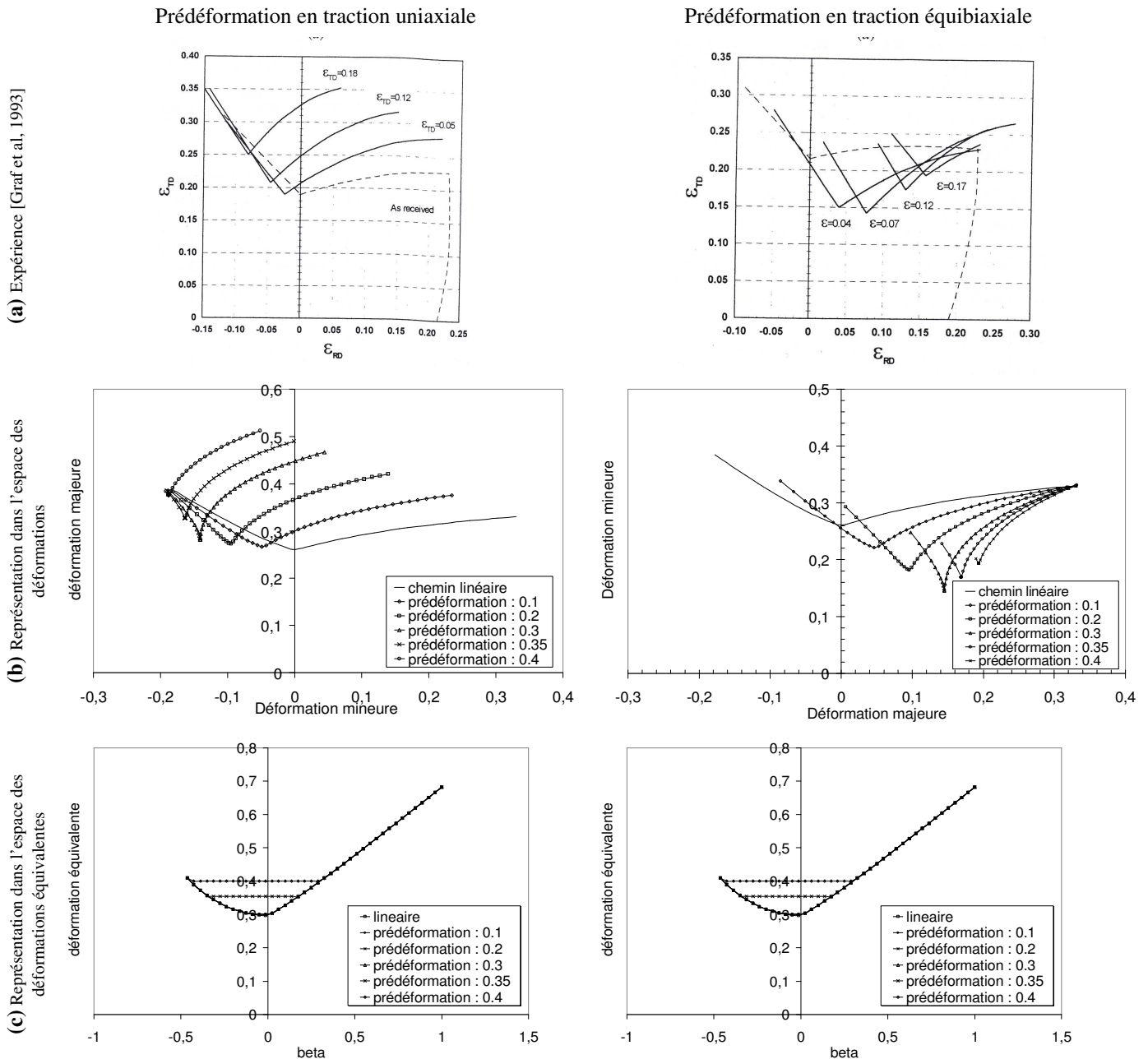


Figure 3.42 : Comparaisons entre les CLF expérimentales (a) et les prédictions du CFMM (b,c).

Mesrar [Mesrar et al, 1998] a pu évaluer, grâce à un modèle de M-K, le caractère intrinsèque des CLF dans l'espace  $(\beta, \bar{\epsilon})$ , ses simulations confortent assez bien ce caractère. De même, et en utilisant la

méthode de perturbation 2D, Boudeau [Boudeau et al, 2000] a pu vérifier que les CLF sont quasi indépendantes du chemin de déformation dans l'espace  $(\beta, \bar{\epsilon})$ .

### Remarque

Notons ici que les représentations des CLF dans l'espace  $(\beta, \bar{\epsilon})$  et dans l'espace des contraintes [Arrieux, 1990] sont équivalentes. Toutefois, la transformation d'une CLF de l'espace des déformations principales vers l'espace des contraintes principales nécessite la connaissance de la surface de charge du matériau et sa loi d'écrouissage, en revanche la transformation vers l'espace  $(\beta, \bar{\epsilon})$  n'implique que la surface de charge du matériau (Figure 3.43) et donc introduirait moins d'erreur.

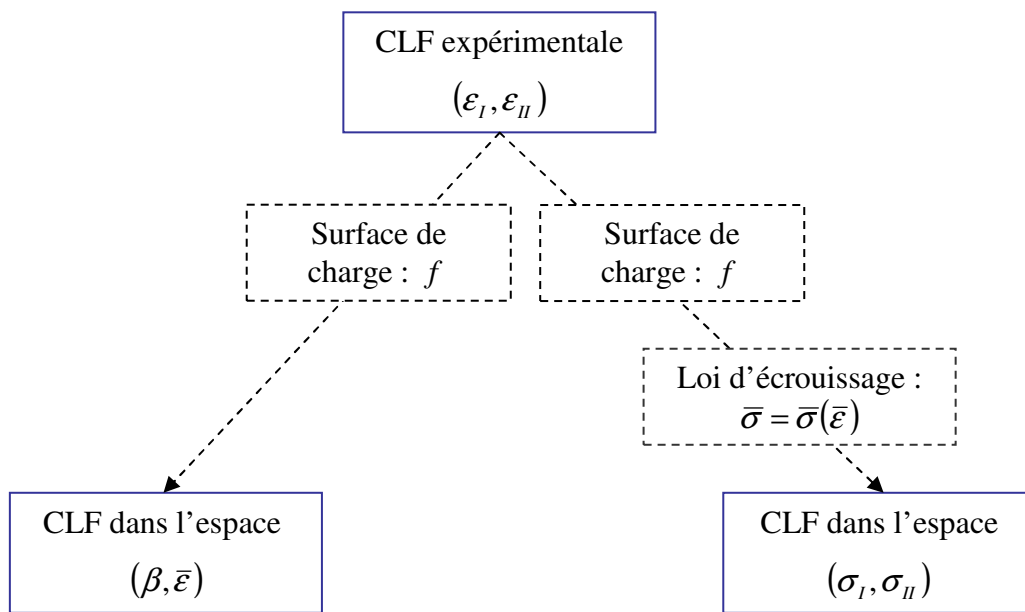


Figure 3.43 : Transformation de la CLF conventionnelle.

### **3.5.5. Etude de l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation**

Si le matériau présente une sensibilité à la vitesse de déformation non nulle, le terme  $m\ddot{\bar{\epsilon}}/\dot{\bar{\epsilon}}^2$  apparaissant dans l'expression du critère (3.118) influe sur la déformation à striction : s'il est de signe positif, la courbe rouge sera donc translatée verticalement vers le haut (Figure 3.44) et les déformations à striction (correspondant à l'intersection avec l'ensemble des fonctions  $K$ ) seront aussi augmentées. Dans ce cas, la sensibilité à la vitesse a un effet stabilisateur. A l'inverse, si le terme  $\ddot{\bar{\epsilon}}$  est de signe négatif, l'effet contraire sera observé et l'introduction de la sensibilité à la vitesse induirait une diminution de la formabilité du matériau.

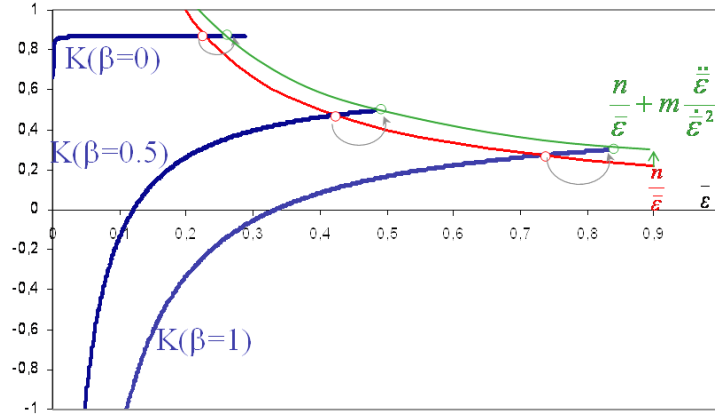


Figure 3.44 : Effet de la vitesse de déformation sur la déformation équivalente limite.

Afin de pouvoir analyser l'effet de la vitesse, il apparaît donc nécessaire d'expliciter le terme  $m\ddot{\bar{\epsilon}}/\dot{\bar{\epsilon}}^2$ . Dans cette expression, le paramètre  $m$  est identifié grâce aux essais de traction. Pour le rapport  $m\ddot{\bar{\epsilon}}/\dot{\bar{\epsilon}}^2$ , nous souhaitons l'exprimer en fonction du taux de déformation majeure car cette variable est accessible par des mesures expérimentales directes.

Le taux de déformation équivalent peut être exprimé en fonction du taux de déformation majeure comme suit :

$$\dot{\bar{\epsilon}}(t) = \frac{\dot{\epsilon}_1(t)}{g(\beta(t))} \quad (3.137)$$

La différentielle totale par rapport au temps conduit à :

$$\ddot{\bar{\epsilon}}(t) = \frac{\ddot{\epsilon}_1(t)}{g(\beta(t))} - \frac{\dot{g}(t)}{g^2(t)} \dot{\epsilon}_1(t) \quad (3.138)$$

En combinant les deux équations précédentes on obtient :

$$\frac{\ddot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}^2} = \frac{g^2}{\dot{\epsilon}_1^2} \left( \frac{\ddot{\epsilon}_1}{g} - \frac{\dot{g}}{g^2} \dot{\epsilon}_1 \right) = g \frac{\ddot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_1^2} - \frac{\dot{g}}{\dot{\epsilon}_1} \quad (3.139)$$

Or

$$\dot{g} = \frac{dg}{dt} = \frac{dg}{d\beta} \dot{\beta} = \hat{g} \dot{\beta} \quad (3.140)$$

Donc

$$\frac{\ddot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}^2} = g \frac{\ddot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_1^2} - \hat{g} \frac{\dot{\beta}}{\dot{\epsilon}_1} \quad (3.141)$$

D'après l'hypothèse de linéarité locale, on a:

$$\frac{\dot{\beta}}{\dot{\epsilon}_1} = \frac{d\beta}{d\epsilon_1} = \frac{d}{d\epsilon_1} \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) = -\frac{\beta}{\epsilon_1} \quad (3.142)$$



Finalement, l'expression de la sensibilité à la vitesse est donnée par :

$$\frac{\ddot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\bar{\epsilon}}^2} = g \frac{\ddot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_1^2} + \hat{g} \frac{\beta}{\epsilon_1} \quad (3.143)$$

Il est utile à ce niveau d'explicitier l'expression de la fonction  $\hat{g}$ .

En partant de la définition de la fonction  $g$  donnée par :

$$g(\beta) = \frac{1}{\mathbf{f}(\Omega)(1 + \beta\Omega)} \quad (3.144)$$

on obtient :

$$\hat{g}(\beta) = \frac{dg}{d\beta} = \frac{\partial g}{\partial \beta} + \frac{\partial g}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{d\beta} \quad (3.145)$$

où

$$\frac{dg}{d\beta} = -\frac{\Omega}{\mathbf{f}(1 + \beta\Omega)^2} - \frac{\frac{d\mathbf{f}}{d\Omega}(1 + \beta\Omega) + \beta\mathbf{f}}{(\mathbf{f}(1 + \beta\Omega))^2} \frac{d\Omega}{d\beta} \quad (3.146)$$

Finalement :

$$\hat{g}(\beta) = -\frac{1}{\mathbf{f}(1 + \beta\Omega)^2} \left( \Omega + \frac{d\Omega}{d\beta} \left( \frac{d\mathbf{f}}{d\Omega} \frac{1 + \beta\Omega}{\mathbf{f}} + \beta \right) \right) \quad (3.147)$$

Si on considère des chemins de déformation linéaires ( $\bar{\epsilon} = \epsilon_1/g$ ), et en combinant les expressions (3.118) et (3.143), une expression analytique du critère de striction peut alors être établie en tenant compte de l'effet de la vitesse de déformation :

$$\bar{\epsilon}^* = \frac{n + \left( m \frac{\hat{g}}{g} - \frac{\frac{d\mathbf{f}}{d\Omega}}{\mathbf{f}} \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \right) \beta}{g \left( 1 - m \frac{\ddot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_1^2} \right)} \quad (3.148)$$

Dans cette expression l'effet de la vitesse de déformation apparaît au niveau de deux termes : un premier terme au numérateur ( $m \hat{g}/g$ ) et un deuxième terme au dénominateur ( $m \ddot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_1^2$ ).

#### 3.5.5.1. Influence du terme au numérateur ( $m \hat{g}/g$ )

En supposant que  $m \ddot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_1^2$  est nul dans l'équation (3.148) (i.e  $\dot{\epsilon}_1 = cte$ ), le critère devient uniquement fonction du critère de plasticité et du chemin de déformation suivi. Il est indépendant de la vitesse de déformation. Sur la Figure 3.45, on a représenté l'évolution de la fonction  $\hat{g}/g$  pour un critère de Hill48 et pour différentes valeurs de  $r$ .

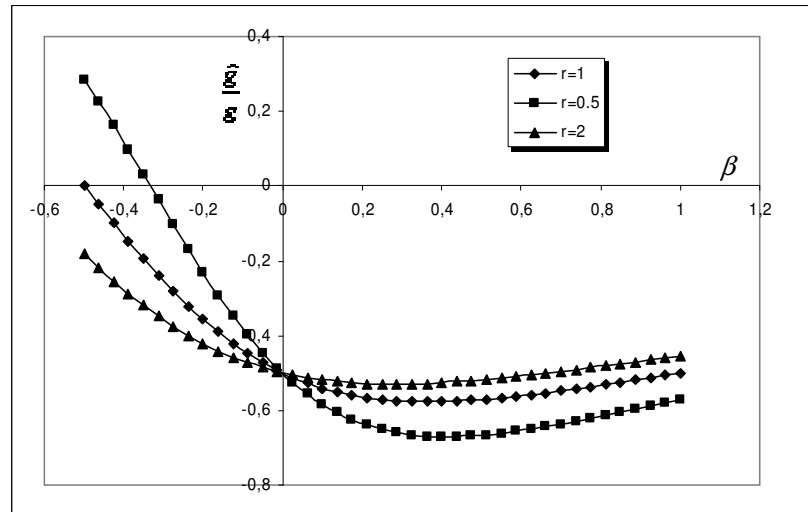


Figure 3.45 : Evolution de la fonction  $\hat{g}/g$  en fonction du rapport des déformations  $\beta$  pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie et ce pour un critère de Hill48 en anisotropie normale.

L'influence du terme  $m\hat{g}/g$  sur les courbes limites de formage pour le cas isotrope est représentée sur la Figure 3.46. On note une influence très faible qui se manifeste principalement dans la zone d'expansion. D'autres tests menés avec un critère de Hill anisotrope ont aussi montré une faible influence du terme  $(m\hat{g}/g)$  sur les CLF.

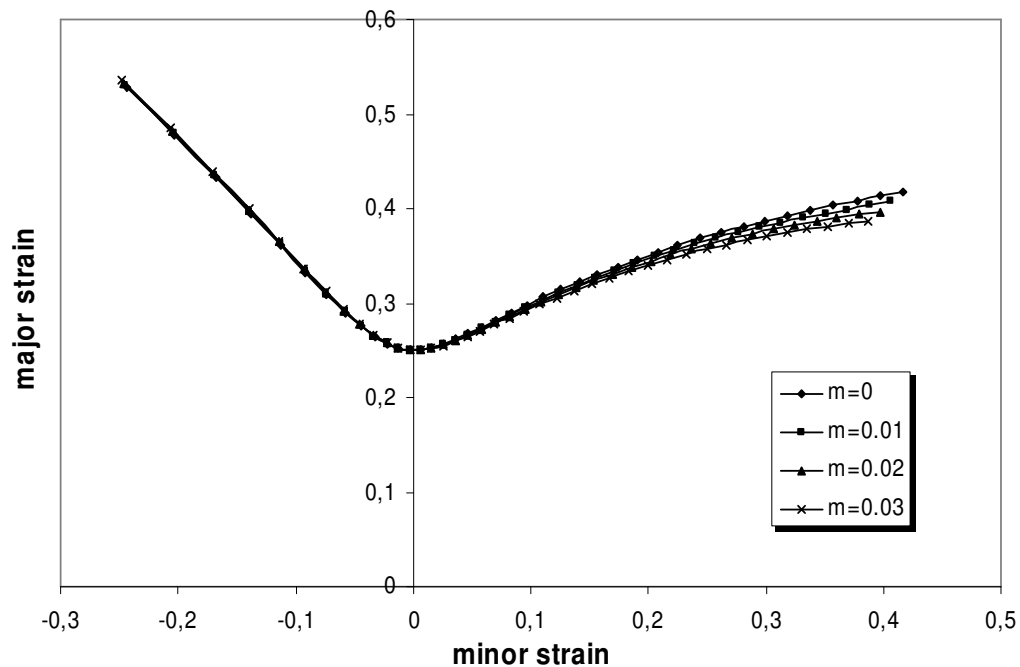


Figure 3.46 : Influence du terme  $m\hat{g}/g$  sur la prédiction des CLF.

### 3.5.5.2. Influence du terme au dénominateur : $m\ddot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_1^2$

On néglige à présent le terme  $m\hat{g}/g$  dans l'expression du critère (3.148). De plus, et afin d'étudier analytiquement l'influence de  $m\ddot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_1^2$  sur la prédiction des CLF, on va supposer que le taux de déformation majeure s'écrit en fonction de la déformation majeure sous la forme exponentielle suivante :

$$\dot{\epsilon}_1 = a \exp(b \cdot \epsilon_1) \quad (3.149)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes identifiables à partir de mesures expérimentales ou de simulations numériques. Cette hypothèse a le mérite de simplifier l'expression du terme  $m\ddot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_1^2$  qui se réduit au produit suivant:

$$m \frac{\ddot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_1^2} = m \cdot b \quad (3.150)$$

Il est donc possible d'étudier séparément l'influence du coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$  et l'influence de la vitesse de déformation à travers le coefficient caractéristique  $b$ .

Un résultat auquel on s'attendait est représenté sur la Figure 3.47 : l'accroissement du coefficient de sensibilité à la vitesse entraîne une nette amélioration de la formabilité du matériau et ce malgré les faibles valeurs des coefficients utilisés.

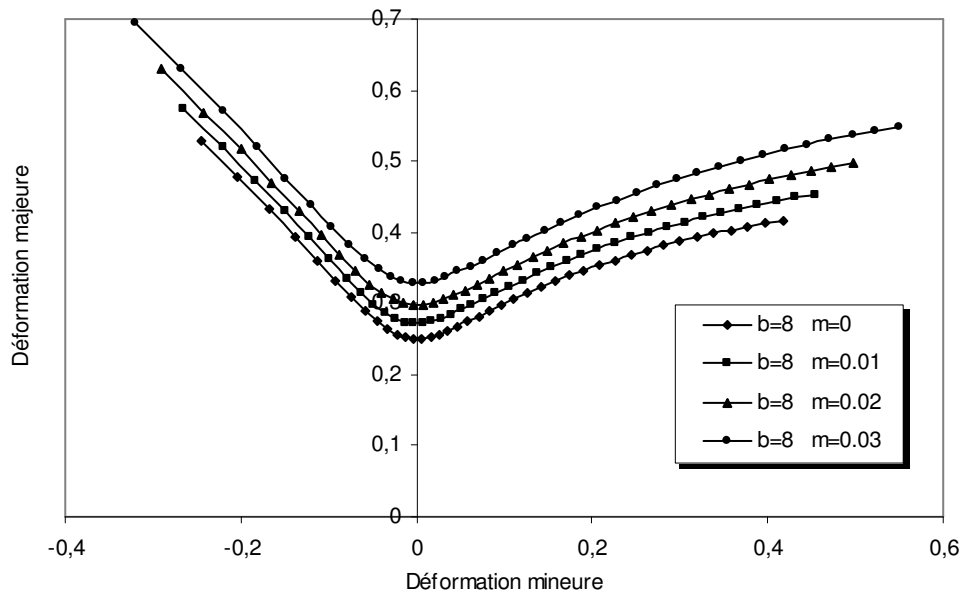


Figure 3.47 : Effet du coefficient de sensibilité à la vitesse ( pour un coefficient  $b=8$ ).

Concernant le deuxième paramètre  $b$ , son influence sur les CLF est représenté sur le graphe de la Figure 3.48. On note que l'accroissement de ce paramètre entraîne également une amélioration de la formabilité.

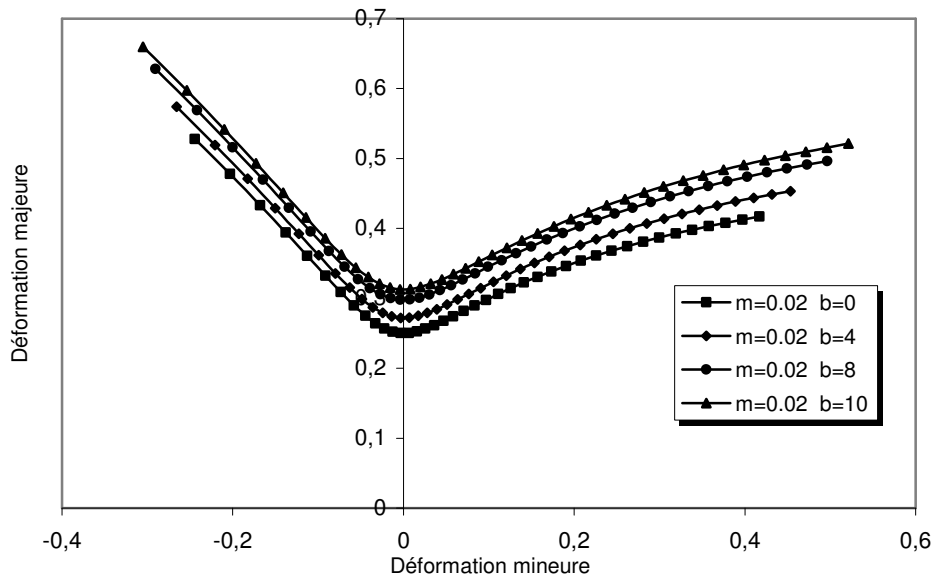


Figure 3.48 : Effet de la vitesse de déformation sur la prédiction des CLF pour un coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation  $m=0.02$ .

### Remarque

Bien que le matériau peut présenter une certaine sensibilité à la vitesse, le modèle ne prévoit aucune amélioration de la formabilité lorsque le matériau est sollicité à une vitesse de déformation majeure constante ( $b = 0$ ). A l'examen de ce résultat, il serait intéressant de mener des essais de traction à vitesse de déformation constant et d'évaluer l'allongement à rupture des éprouvettes.

En résumé, on constate que le terme du numérateur a une influence relativement faible comparée à l'influence du terme du dénominateur. Pour simplifier l'expression du critère, il est donc justifié de le négliger. Le critère s'écrit alors :

$$\bar{\epsilon}^* = \frac{n - \frac{\frac{d\mathbf{f}}{d\Omega}}{\mathbf{f}} \frac{\beta}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}}}{g \left( 1 - m \frac{\ddot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_1^2} \right)} \quad (3.151)$$

Cette écriture est uniquement valable pour des chemins linéaires et pour des lois d'écrouissage de type puissance. Pour revenir à une forme générale du critère FMM tout en intégrant l'effet de la vitesse de déformation, on reprend l'équation (3.116) qu'on combine avec l'équation (3.141). Dans ce cas, le critère s'écrit :

$$h(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) + k(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) \cdot g(\beta) \cdot \frac{\ddot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_1^2} \leq g(\beta) \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \mathbf{f}(\Omega)}{\partial \Omega}}{\mathbf{f}(\Omega)} \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \frac{\beta}{\epsilon_1} \right] \bar{\sigma} \quad (3.152)$$

### 3.6. Application du CFMM et comparaison avec les CLF expérimentales

Nous avons appliqué le critère FMM (3.152) aux matériaux de l'étude. Auparavant, nous avons effectué des mesures de la vitesse de déformation majeure afin d'identifier le paramètre de vitesse  $b$  défini par l'équation (3.149). A titre d'exemple, sont reportées sur la Figure 3.49 les courbes d'évolution de la vitesse de déformation majeure du DP450 pour les trois matrices de gonflage. Les courbes sont approchées par une régression exponentielle pour identifier ainsi le coefficient  $b$ .

Le Tableau 3-2 résume les valeurs du paramètre  $b$  pour les différents matériaux de l'étude. On remarque que les valeurs les plus élevées sont observées en gonflage elliptique N°2, ceci en raison de la géométrie étroite de cet essai qui entraîne une variation rapide de la vitesse.

D'autre part, la moyenne des vitesses de déformation calculée pour chacun des matériaux, montre qu'elle est maximale pour le TRIP800, alors qu'elle est minimale pour le DC04. L'attribution de ces différences de vitesses aux seules différences des coefficients de sensibilité à la vitesse semble être intuitive mais pas forcément justifiée. En effet, le modèle de Ghosh (cf. §3.4.3) met bien en évidence un effet de couplage entre le coefficient d'érouissage, le coefficient de sensibilité à la vitesse et le coefficient de Lankford dans la détermination de la stabilité de l'écoulement et a fortiori dans la vitesse de l'écoulement.

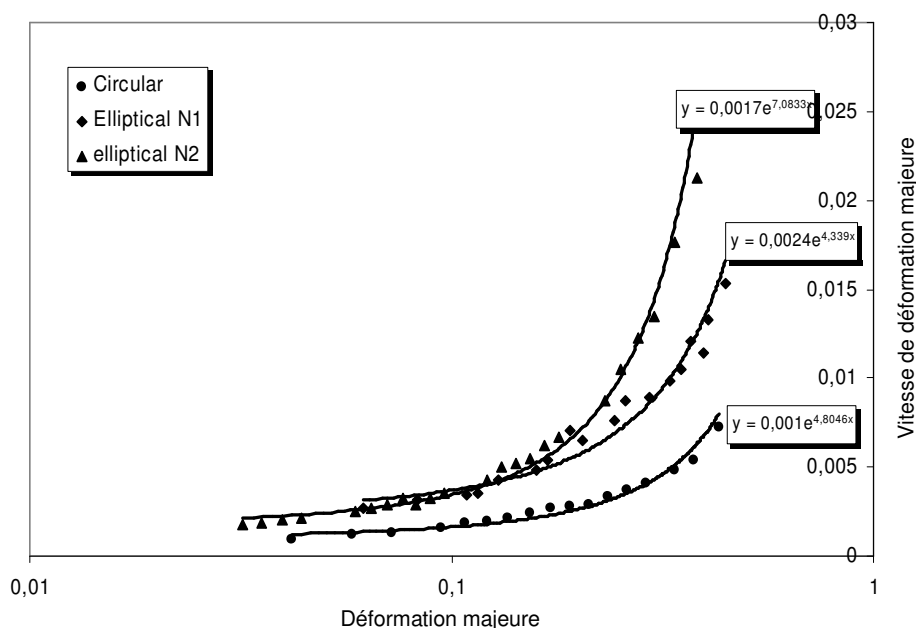


Figure 3.49 : Courbes d'évolution de la vitesse de déformation majeure en fonction de la déformation majeure mesurées pour les trois géométries de matrices (acier DC04).

Au cours de la déformation, les chemins de déformation semblent évoluer sur les trois essais de gonflage tout particulièrement pour l'essai de gonflage en petite matrice (Figure 3.50).

Tableau 3-2 : Valeur du coefficient b pour les trois nuances d'acier avec les trois tests de gonflage.

	Circulaire	Elliptique N°1	Elliptique N°2	Moyenne
DC04	4.80	4.34	7.08	5.41
DP450	5.08	5.8	8.7	6.53
TRIP800	7.07	10.49	11.51	9.69

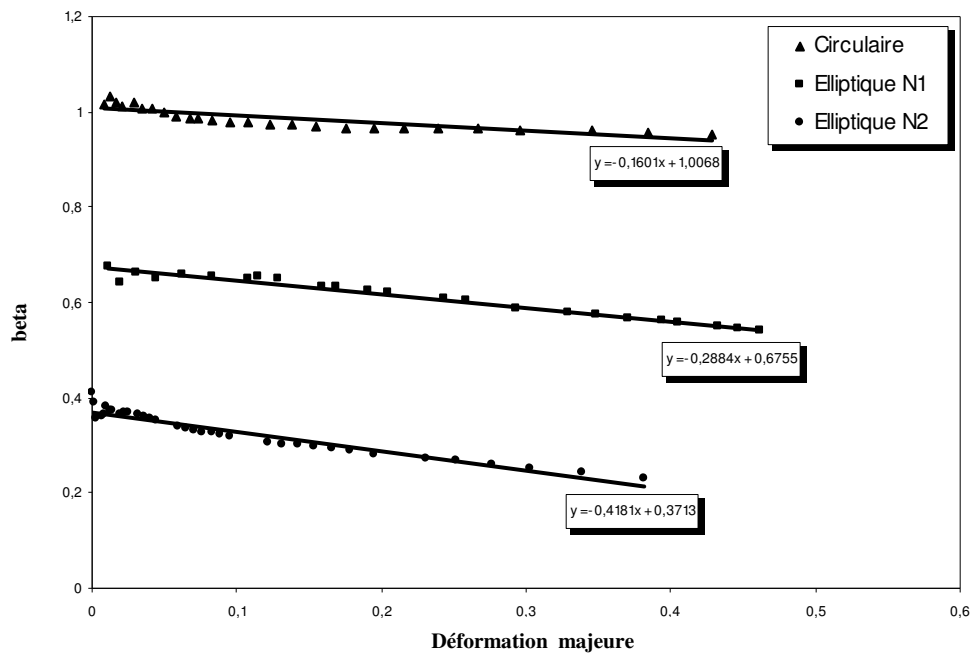


Figure 3.50 : Courbes d'évolution du chemin de déformation (acier DP450)

Les lois d'écroûissage sont identifiées via les essais de gonflage circulaires et dont la validité s'étend aux grandes déformations. Les chemins de déformations seront supposés linéaires, on néglige donc les variations soulignées sur la Figure 3.50. En effet, quelques simulations ont montré un abaissement relativement faible des CLF lorsque des chemins non linéaires sont pris en compte.

Les prédictions du critère CFMM sont comparées aux CLF expérimentales du DC04, DP405 et du TRIP800. Notons que les CLF expérimentales utilisées correspondent à la moyenne des CLF identifiées par les différents tests de caractérisation (Figures 3.9-3.11).

Pour le DC04, la Figure 3.51 montre que le CFMM tend à sous-estimer les courbes expérimentales. L'introduction de l'effet de la vitesse semble améliorer les prédictions pour un coefficient de sensibilité  $m=0.016$ . [Mahmudi, 1997] a souligné que le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation est supérieur en traction équi-biaxiale qu'en traction uni-axiale pour le cas d'un alliage d'aluminium. On a donc représenté une deuxième courbe pour un coefficient de sensibilité  $m=0.032$  afin d'apprécier son influence. On voit que la CLF se rapproche encore plus des expériences mais le modèle reste encore conservatif. Par ailleurs, on note que la forme des CLF est mieux approchée par le critère non quadratique de Hosford que par le critère quadratique de Hill48.

Pour le DP450, dont les résultats sont portés sur la Figure 3.52, on note que le critère non quadratique de Hosford semble mieux approcher la forme de la CLF expérimentale. Cependant, le critère reste assez conservatif pour les valeurs de  $m$  variant entre 0.01 et 0.02.

Sur la Figure 3.53, l'influence de la loi d'écroutissage du TRIP800 est discutée. On note que, malgré le fait que la courbe d'écroutissage soit bien approchée par la loi de Voce (Figure 2.35), les CLF associées à cette loi semble trop s'écarter des résultats expérimentaux aussi bien pour le critère de Hill48 que pour le critère de Hosford. Cependant, pour une loi d'écroutissage de type Krupkowski, les prédictions du CFMM semblent en assez bon accord avec les mesures expérimentales. L'introduction de l'effet de la vitesse, représenté sur la Figure 3.54, montre de très bons accords avec l'expérience (en expansion) pour le critère non quadratique de Hosford et pour un coefficient  $m$  variant entre 0.01 et 0.02.

Ces simulations ont permis une évaluation de l'effet de la sensibilité à la vitesse sur les prédictions du CFMM. Par ailleurs, il serait opportun d'approfondir l'identification du coefficient de sensibilité à la vitesse par des essais de traction uni-axiale voire même par des essais multi-axiaux comme cela été proposé par Mahmudi [Mahmudi, 1997]. Signalons que les coefficients de sensibilité à la vitesse que nous avons utilisés pour les simulations sont en accord avec les estimations établies par ARCELOR [Cayssials, 2005] (Figure 3.55 et Tableau 2.2).

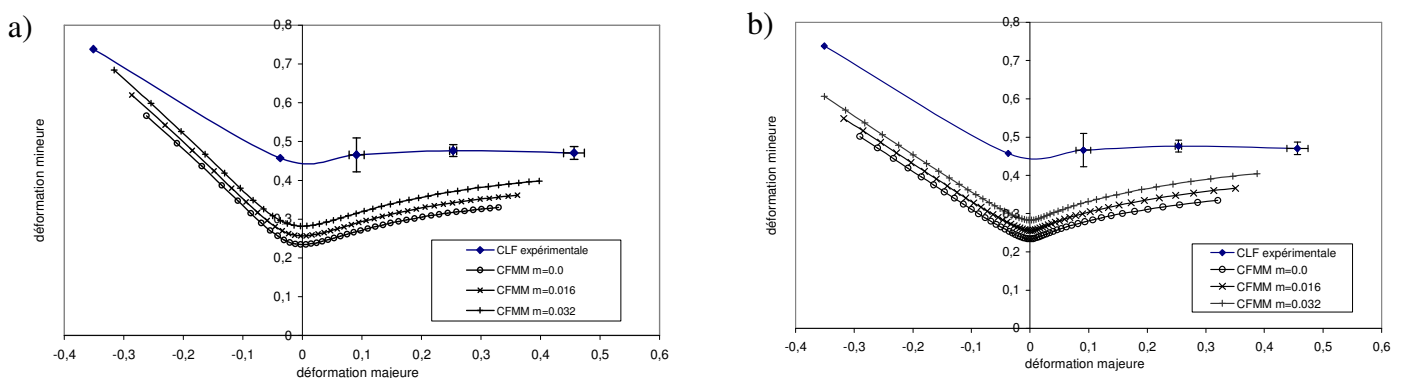


Figure 3.51 : Comparaison entre les prédictions du CFMM et les CLF expérimentales du DC04 :  
a) pour un critère de Hill48 ; b) pour un critère non quadratique de Hosford.

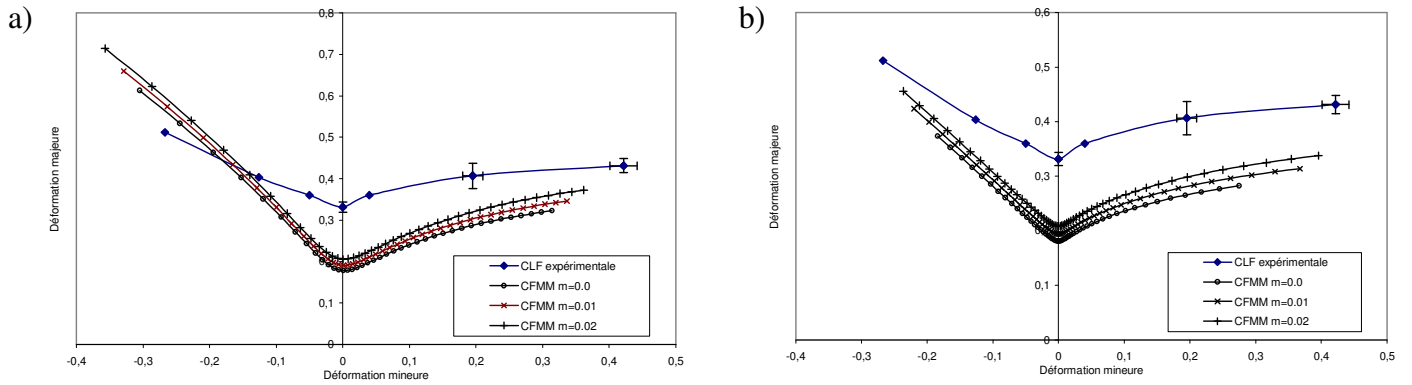


Figure 3.52 : Comparaison entre les prédictions du CFMM et les CLF expérimentales du DP450 :  
a) pour un critère de Hill48 ; b) pour un critère non quadratique de Hosford.

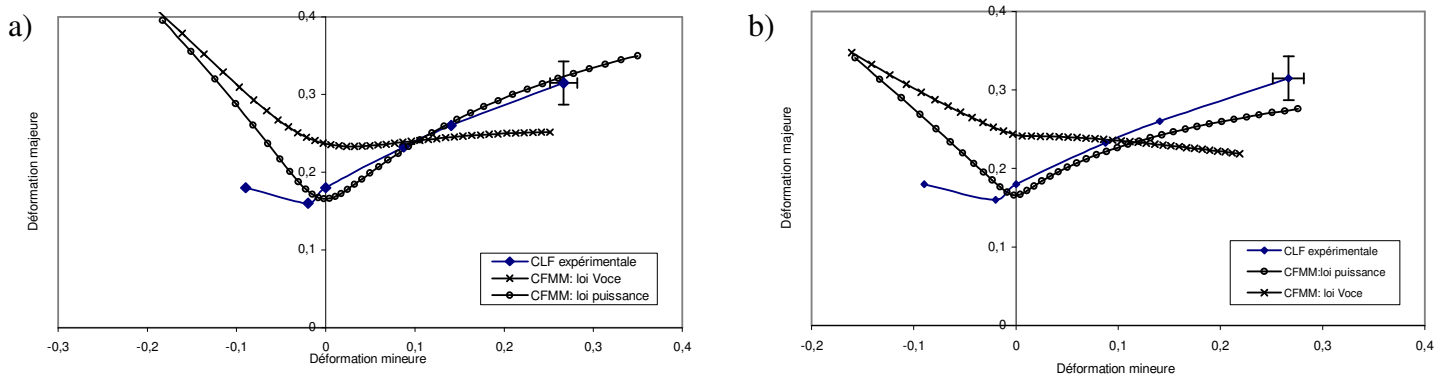


Figure 3.53 : Comparaison entre les prédictions du CFMM et les CLF expérimentales du TRIP800 :  
a) pour un critère de Hill48 ; b) pour un critère non quadratique de Hosford.

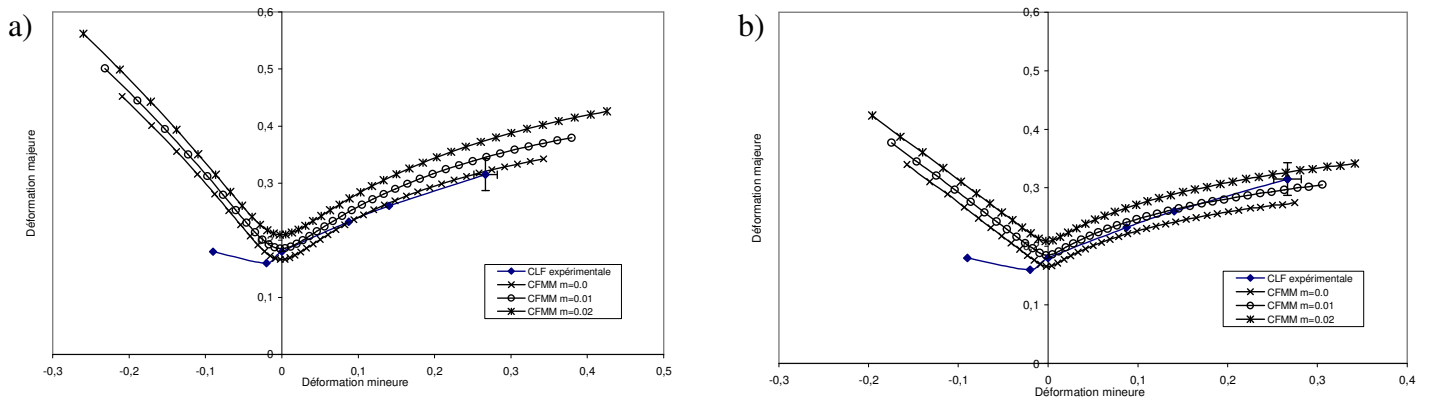


Figure 3.54 : Comparaison entre les prédictions du CFMM et les CLF expérimentales du TRIP800 :  
a) pour un critère de Hill48 ; b) pour un critère non quadratique de Hosford.



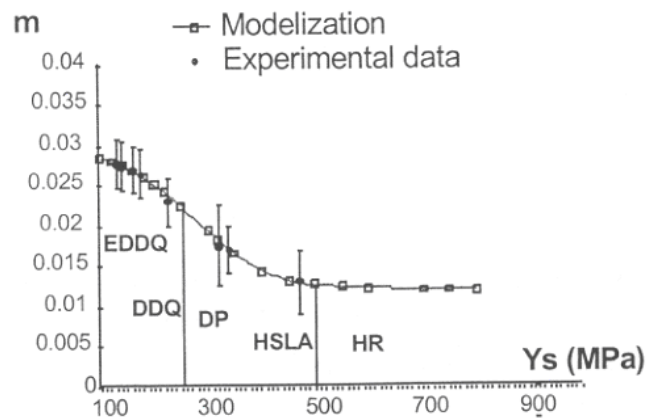


Figure 3.55 : relation entre le coefficient de sensibilité à la vitesse et la limite élastique [Cayssials, 2005]

### 3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé, en première partie, l'identification expérimentale des Courbes Limites de Formage via des essais de gonflage. Quelques écarts ont été soulignés entre nos courbes et d'autres CLF déterminées par d'autres types de tests. Bien qu'il ne soit pas complètement surprenant d'observer de telles différences, il n'en reste pas moins qu'un besoin de standardisation des essais de caractérisation se fait de plus en plus sentir. Dans certain pays, comme la France et l'Allemagne, des groupes de travail ont déjà commencé des investigations dans ce sens.

En deuxième partie du chapitre, nous avons présenté une revue des modèles analytiques de prédiction des CLF et nous avons mis l'accent sur la nécessité d'une étude comparative intensive entre ces différents modèles afin d'évaluer leur fiabilité et leur pertinences relatives. Ensuite, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'étude du critère de FMM pour lequel nous avons pu mettre en exergue la relation entre le critère de plasticité et les prédictions du modèle, en outre, nous avons intégré l'effet de la vitesse de déformation qui a permis une amélioration des prédictions du modèle mais qui reste néanmoins assez conservatif pour certains aciers. Sur ce point, il nous semble que de plus amples investigations expérimentales pour la détermination précise du coefficient de sensibilité à la vitesse dans différentes configurations de chargement est nécessaire.

Enfin, une interprétation graphique du critère CFMM nous a conduit à conclure qu'une représentation des CLF dans l'espace défini par le chemin de déformation et la déformation équivalente permettrait de s'affranchir de la dépendance des CLF conventionnelles aux chemins de déformations. Cette conclusion semble corroborer les résultats d'autres travaux utilisant des modèles de type Marciniak et de type perturbation.

## Références

- Arrieux, R. (1990), *Détermination théorique et expérimentale des courbes limites de formage. Application aux matériaux anisotrope*. Thèse de doctorat, Université Lyon I- INSA Lyon, France.
- Barbier, G.; Benallal, A. (1998), *Relation théorique entre la méthode de perturbation linéaire et l'analyse de bifurcation pour la prédiction de la localisation des déformations*. C.R. Acad. Sci. Paris, Mécanique des solides et des structures, 326 (SérieII b), pp153-158, 1998.
- Banabic, D.; Comsa, S.; Jurco, P.; Cosovici, G.; Paraianu, L.; Julean, D. (2004), *FLD theoretical model using a new anisotropic yield criterion*. Journal of materials processing technology 157-158 (2004) pp:23-27.
- Banabic, D.; Dannenmann, E. (2001), *Prediction of the influence of yield locus on the limit strains in sheet metals* . Journal of materials processing technology 109 (2001) pp:9-12.
- Barlat, F. (1987), *Crystallographic texture, anisotropic yield surfaces and forming limits of sheet metals*. Materials science and Engineering, vol.91 (1987), pp55-72.
- Ben Tahar, M.; Massoni, E. (2004) *Use of the Modified Maximum Force Criterion for necking analysis during sheet bulging*, 10<sup>th</sup> international Metal Forming Conference 2004, Krakow-Pologne, pp. 229-234.
- Boudeau, N.; Gelin, J. C. (2000), *Necking in sheet metal forming. Influence of macroscopic and microscopic properties of materials*. International Journal of Mechanical Sciences, vol.42, n°9, (2000) pp. 2209-2322.
- Butuc, M.C.; Cracio, J.J.; Barata, da Rocha A. (2003), *A theoretical study on forming limit diagrams prediction*. Journal of materials processing technology 142 (2003) pp: 714-724.
- Bragard, A.; Baret, J.C.; Bonnarens, H. (1972), *A simplified technique to determine the FLD at the onset of necking*. IDDRG, 1972, Amsterdam, DDR/WGI/21 P/72.
- Brunet, M.; Mguil-touchal, S.; Morestin, F. (1998), *Analytical and experimental studies of necking in sheet forming processes*. Journal of materials processing technology, 80-81, pp40-46 (1998).
- Broomhead, P. (1982), *The effect of strain rate on the strain to fracture of a sheet steel under biaxial tensile stress condition*. Transaction of the ASME, vol.104, April 1982, pp. 102-106.
- Caceres, C.H.; Wilkinson, D.S. (1984), Acta Metall. 32 (3) (1984), pp. 415-422.
- Cao, J.; Yao, H.; Karafillis, A.; Boyce, M.C. (2000), *Prediction of localized thinning in sheet metal using a general anisotropic yield criterion*. International Journal of Plasticity, vol.16 (2000) 1105-1129.

- Cayssials, F.; Lemoine, X. (2005), *Predictive model of FLC (Arcelor model) upgraded to UHSS steels*. Proceedings 24<sup>th</sup> international Deep-Drawing Research Group Congress (IDDRG), Besançon, France (2005).
- Chater, E.; Neale, K. W. (1982), *Finite plastic deformation of a circular membrane under hydrostatic pressure-I, rate-independent behaviour*. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 25 (1983) pp. 219-233.
- Chater, E.; Neale, K. W. (1982), *Finite plastic deformation of a circular membrane under hydrostatic pressure-II, strain-rate effects* International Journal of Mechanical Sciences, vol. 25 (1983) pp. 235-244.
- Chen, P.; Gerdeen, J.C. (1989), *Bending effects on forming limit diagrams*. Forming Limit Diagrams: Concepts, Methods, and applications, Edited by R.H. Wagoner, K.S. Chan, S.P. Keeler, The Minerals, Metals & Materials Society, 1989.
- Chu, C.C. (1979), *Bifurcation of elastic-plastic circular cylindrical shells under internal pressure*. J. Appl. Mech., vol.46, pp 889-894.
- Chung, L.C.; Cheng J.H. (2002), *Fracture criterion and forming pressure design for superplastic bulging*. Materials Sciences and Engineering, A 333 (2002), pp. 146-154.
- Chung, L.C.; Cheng J.H. (2001), *The analysis of instability and strain concentration during superplastic deformation*, A 308 (2001), pp. 153-160.
- Dudzinski, D.; Molinari, A. (1990), *Modélisation et prévision des instabilités plastiques en emboutissage*. F. Moussy and P. Franciosi, éditeurs, Physique et Mécanique de la Mise en Forme des Métaux, Ecole d'été d'Oléron, p 444-460. Presses du CNRS, 1990.
- Duncombe, E. (1972), Inter. J. Mech. Sci, vol.14, p. 325.
- Friedman, P.A.; Pan, J. (2000), *Effects of plastic anisotropy and yield criteria on prediction of forming limit curves*. International Journal of Mechanical Sciences vol.42 (2000) pp. 29-48.
- Fromentin, S. (1998), *Etablissement d'un critère de striction intrinsèque des tôles et validation numérique par simulation numérique d'emboutissage*. Thèse de doctorat, Université de Metz, France.
- Ghosh, A. K. (1974), *Strain localization in the diffuse neck in sheet metal*. Metallurgical Transactions, vol.5, pp. 1607-1616.
- Ghosh, A. K. (1975). Met. Eng. Q., vol.15, pp. 53-64.
- Ghosh, A. K. (1977-a), *A numerical analysis of the tensile test for sheet metals*. Metallurgical Transactions, vol.8A, pp. 1221-1232.
- Ghosh, A. K. (1977-b), *Tensile instability and necking in materials with strain hardening and strain-rate hardening*. Acta metallurgica, vol. 25, pp. 1413-1424.

Graf, A.F.; Hosford, W. F. (1993-a), *Calculations of forming limit diagrams for changing strain paths*, Metallurgical transaction A, vol:24A, Novembre 1993, pp.2497-2501.

Graf, A.F.; Hosford, W. F. (1993-b), *Effect of changing strain paths on forming limit diagrams of Al 2008-T4*, Metallurgical transaction A, vol:24A, Novembre 1993, pp.2503-2512.

Gronostajski, J. (1984), *Sheet Metal forming limit for complex strain paths*, J. Mech. Wor. Tech., vol.10 (1984), pp.349-362.

Hart, E. W. (1967), *Theory of the tensile test*. Acta metallurgica, vol.15, pp. 351-355.

Hecker, S. S. (1972), *A simple forming limit curve technique and results on aluminium alloys*.

Hill, R. (1952), *On discontinuous plastic states with special reference to localised necking in thin sheet*. J. Mech. Phys. Solids, 1 pp 19-30.

Hill, R. (1958), *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*. J. Mech. Phys. Solids, vol.6, pp. 236-249.

Hora, P.; Tong, L.; Reissner, J. (1996), *A prediction method for ductile sheet metal failure*. Proceedings of the Numisheet96 conference, Dearbon, USA, 1996, pp252-256.

Hutchinson, W.J.; Neale K.W. (1977), *Influence of strain-rate sensitivity on necking under uniaxial tension*. Acta metallurgica, vol. 25, pp. 839-846.

Hutchinson, W.J.; Neale K.W. (1978), *Sheet necking III. Strain rate effects. Mechanics of sheet metal forming*, pp. 269-285.

Ito, K.; Satoh, K.; Goya, M.; Yoshida, T. (2000), *Prediction of limit strain in sheet metal-forming processes by 3D analysis of localized necking*. I. J. Mech. Sci.vol.42 (2000) pp.2233-2248.

Kleemola, H.J.; Pelkkikangas, M.T. (1977), *Effect of predeformation and strain path on the forming limits of steel, cooper and Brass*, International sheet metal industries, june 1977 pp-591-599.

Knockaert, R. (2001), *Etude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Kuroda, M.; Tvergaard, V. (2000), *Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria*, International Journal of Solids and Structures vol.37 (2000) pp5037-5059.

Larson, M.; Needleman, A.; Tvergaard, V.; Strokakers B. (1982), *Instability and failure of internally pressurized ductile metal cylinders*. J. Mech. Phys. Solids, vol.30, pp121-154.

- Lejeune, A. (2002), *Modélisation et simulation de la striction et de plissement en emboutissage de tôle minces et en hydroformage de tubes minces*. Thèse de doctorat, U.F.R des sciences et techniques, Université de Franche-Comté, France.
- Liebertz, H.; Keller, S.; Merklein, M.; Illig, R.; Koehler, A.; Kröff, A.; Rauer, J.; Staubwasser, L.; Steinbeck, G.; Hotz, W.; Vegter, A. (2004), *Guidline for the determination of Forming Limit Curves* IDDRG May 2004.
- Li, M.; Chandra, A. (1999), *Influence of strain-rate sensitivity on necking and instability in sheet metal forming*. Journal of Materials Processing Technology vol.96 (1999), pp.133-138.
- Mahmudi, R. (1997), *Post-uniform deformation in uniaxial and equi-biaxial stretching of aluminium alloy sheets*. Journal of Materials Processing Technology vol.70 (1997) pp.93-98.
- Marciniak, Z.; Kuczynski, K. (1967), *Limit strain in the process of stretch forming sheet metal*. Int. J. mech. Sci. (1967) vol.9, pp. 609-620.
- Marciniak, Z.; Kuczynski, K.; Pokora, T. (1973), *Influence of the plastic properties of a material on the forming limit diagram for sheet metal in tension*. Int. J. mech. Sci. (1973) vol.15, pp. 789-805.
- Mesrar, R.; Fromentin, S.; Makkouk, M.; Ferron, G. (1998), *Limits to the ductility of metal sheets subjected to complex strain-paths*. International Journal of Plasticity, vol.14, pp.391-411.
- Needleman, A. (1988), *Material rate dependance and mesh sensitivity in localization problems*. Computer Methods in applied Mechanics and Engineering vol.67 (1988) pp.69-85.
- Paramar, A.; Mellor, P.B. (1978), *Prediction of limit strains in sheet metal using a more general yield criterion*. Int. J. Mech. Sci. vol. 20 (1978) pp.385-391.
- Peixinho, N.; Jones, N.; Pinho, A. (2003), *Experimental and numerical study in axial crushing of thin walled sections made of high-strength steels*. J. Phys. IV, vol.110 (2003), pp. 717-722.
- Percy, J.H. (1980), *The effect of strain rate on the forming limit diagram for sheet metal*. Annals of the CIRP, vol.29/1/1980, pp. 102-106.
- Petryk, H. (1996), *Post-critical plastic deformation of biaxially stretched sheets*. Int. J. Solids Structures vol. 33, no 3, pp. 689-705 (1996).
- Ramaekers, J.A.H.; Bongaeart P.C.P. (1994), *A note on the Forming Limit Curve*. Shemet, Belfast, 1994, pp. 39-50.
- Ramaekers, J.A.H. (2000), *A criterion for local necking*. J. Mat. Proc. Tech., 103 (2000) pp.165-171.
- Rees, D.W.A. (1995), *Plastic flow in elliptical bulge test*. Int. J. Mech. Sci., vol. 37 n°4, pp. 373-389 (1995).

Strören, S.; Rice, J.R. (1975), *Localized necking in thin sheets*, J. Mech. Phys. Solids, vol.23, pp 421-441 (1975).

Semiatin, S.L., Jonas, J.J. (1983), *Formability and workability of metals plastic instability and flow localization*. American Society for Metals. Metals Park, Ohio 44073.

Swift, H.W., *Plastic instability under plane stress*. J. Mech. Phys. Solids 1, 1.

Tvergaard, V. (1990), *Bifurcation in elastic-plastic tubes under internal pressure*, Eur. J. Mech. A/solids, vol.9, n°1, pp 21-35 (1990).

Van, Minh. H.; Sowerby, R.; Duncan. J. L. (1973), *Variability of forming limit curves*, Int. J. mech. Sci., Pergamon Press, vol. 16, (1973) pp. 31-44.

Veerman, C.C.; Hartman, L.; Peels, J.J.; Neve, P.F. (1971), *Determination of appearing and admissible strain in cold reduced sheets*, Sheet metal industries; sep. 197, pp. 678-694.

Xu, S.; Weinmann, K.J. (1998), *Prediction of forming limit curves of sheet metals using Hill's 1993 user-friendly yield criterion of anisotropic metals*. International Journal of Mechanical Sciences, vol.40, n°9, (1998) pp-913-925.



## Chapitre 4

# Présentation de Forge3® pour la simulation de la mise en forme de produits minces

4.1. Introduction.....	- 146 -
4.2. Description du mouvement.....	- 146 -
4.3. Equations de conservation .....	- 147 -
4.4. Conditions aux limites.....	- 147 -
4.5. Loi de comportement élasto-plastique continue.....	- 149 -
4.6. Formulation faible du problème .....	- 151 -
4.6.1. Formulation faible continue ou principe des travaux virtuels .....	- 151 -
4.6.2. Formulation discrète.....	- 152 -
4.6.3. Discrétisation temporelle.....	- 154 -
4.6.4. Gestion incrémentale du contact.....	- 158 -
4.6.5. Intégration de la loi de comportement.....	- 159 -
4.6.5.1. Ecriture incrémentale.....	- 160 -
4.6.5.2. Intégration du critère quadratique de Hill .....	- 161 -
4.6.5.3. Dérivée objective de la contrainte .....	- 163 -
4.7. Maillage et remaillage .....	- 164 -
4.7.1. Position du Problème.....	- 164 -
4.7.2. Choix du mailleur.....	- 164 -
4.7.3. Etude du mailleur à plan moyen.....	- 166 -
4.7.3.1. Principe.....	- 166 -
4.7.3.2. Procédure de remaillage .....	- 167 -
4.7.3.3. Le transport.....	- 170 -
4.7.4. Exemple : emboutissage d'un pied milieu.....	- 171 -
4.8. Conclusion .....	- 174 -
Références .....	- 175 -



## 4.1. Introduction

Le code de calcul par la méthode des éléments finis Forge3® est un code 3D implicite utilisant une formulation volumique avec des éléments tétraédriques. Ce chapitre est consacré à la présentation de ce code. On y rappelle les principales étapes de la résolution du problème mécanique et de l'intégration des lois de comportement. L'accent sera mis sur les modifications apportées pour l'adapter à la simulation des produits minces.

## 4.2. Description du mouvement

Soit un solide défini par son domaine  $\Omega$  et délimité par sa frontière  $\partial\Omega$ . A l'instant initial  $t_0$ , le solide occupe le domaine noté par  $\Omega_0$ . En se déformant au cours du temps, il occupe à l'instant  $t$  le domaine  $\Omega_t$ . Afin de suivre le mouvement d'un point matériel du solide, il existe une fonction bijective  $\phi$  définie par :

$$\begin{aligned}\phi: \Omega_0 &\rightarrow \Omega_t \\ x_0 &\rightarrow x(x_0, t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ainsi définie, la fonction  $\phi$  décrit la position à l'instant  $t$  du point matériel de coordonnées initiales  $x_0$ . Cette description est appelée description Lagrangienne du mouvement, pour laquelle il est possible d'introduire le champ de déplacement Lagrangien  $u$  défini par :

$$x(x_0, t) = x_0 + u(x_0, t)\tag{4.2}$$

On note que la description du mouvement est complètement définie par la connaissance de l'état initial et de l'état final du point matériel.

Le logiciel Forge3® est basé sur une description Lagrangienne actualisée. En effet, pour suivre le mouvement de la matière entre l'instant initial  $t_0$  et l'instant  $t$ , l'intervalle de temps est divisé en une suite de pas de temps  $[t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t]$ . Sur chacun des intervalles, le mouvement est décrit par la fonction de transformation  $\phi'$  définie par :

$$\begin{aligned}\phi^t: \Omega_t &\rightarrow \Omega_{t+\Delta t} \\ x_t &\rightarrow x_{t+\Delta t}(x_t, t + \Delta t)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Le pas de discrétisation temporelle  $\Delta t$  est choisi suffisamment faible pour permettre d'adopter l'hypothèse des petites déformations (entre 0.1% et 1% de déformation par incrément). Sous cette dernière, la déformation peut être décrite par le tenseur symétrique des déformations qui s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad}(\mathbf{u}) + {}^T\text{grad}(\mathbf{u}))\tag{4.4}$$

De la même façon, on introduit le tenseur taux de déformation symétrique défini à partir du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  par :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad}(\mathbf{v}) + {}^T\text{grad}(\mathbf{v}))\tag{4.5}$$

### 4.3. Equations de conservation

En mise en forme des matériaux, les efforts d'inertie ainsi que les efforts de gravité sont négligeables par rapport aux efforts de déformation plastique. En tenant compte de ces deux hypothèses, le principe fondamental de la dynamique, ou principe de conservation de la quantité de mouvement, postule que :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (4.6)$$

La deuxième équation de conservation concerne l'équation de la conservation de la masse qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.7)$$

Dans le cas d'un matériaux incompressible, la masse volumique  $\rho$  est constante, l'incompressibilité se traduit par :

$$\mathbf{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (4.8)$$

Cette condition est satisfaite pour une transformation purement plastique. Cependant, le comportement élastique est souvent compressible, l'équation (4.8) devient alors :

$$\mathbf{div}(\mathbf{v}) + \frac{\dot{P}}{\chi} = 0 \quad (4.9)$$

Où  $\dot{P}$  est le taux de la pression hydrostatique responsable de la compression du volume,  $\chi$  est le coefficient de compressibilité du matériau déduit à partir des coefficients de Lamé (2.4) par :

$$\chi = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (4.10)$$

### 4.4. Conditions aux limites

Les équations d'équilibre et de comportement sont vérifiées en tout point du volume d'un solide. Les conditions aux limites sont quant à elles appliquées sur la surface extérieure du domaine  $\partial\Omega$ , c'est ce qui conditionne l'état d'équilibre dans le volume.

On peut distinguer trois principaux types de conditions aux limites :

- Condition de bord libre :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{Sur } \partial\Omega_l \quad (4.11)$$

- Condition de pression imposée :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p_{imp} \mathbf{n} \quad \text{Sur } \partial\Omega_p \quad (4.12)$$

Où  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes,  $\mathbf{n}$  la normale extérieur à surface de la pièce et  $p_{imp}$  la pression imposée. Cette condition aux limites correspond à la condition typique d'un procédé d'hydroformage, elle sera étudiée avec plus de détails au chapitre suivant.

- Condition de contact unilatéral frottant.

Le traitement du contact frottant comporte deux aspects : d'abord les conditions de Signorini qui régissent la non pénétration de la pièce dans l'outil, ces conditions sont relatives aux composantes normales du vecteur vitesse et vecteur contrainte de contact. Ensuite, les composantes tangentielles (de la contrainte et de la vitesse) sont régies par la loi de frottement.

#### Conditions de Signorini

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n} &\leq 0 \\ \sigma_n &\leq 0 \\ \sigma_n \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Sur } \partial\Omega_c \quad (4.13)$$

Les équations de ce système décrivent la condition de non pénétration : si la contrainte normale  $\sigma_n$  est nulle alors il n'y a pas de contact, par conséquent la pièce et l'outil peuvent avoir des vitesses différentes. Inversement, dès qu'il y a contact, la vitesse normale du solide est alors égale à la vitesse normale de l'outil (condition de non pénétration), la contrainte normale devient non nulle.

Notons que la contrainte normale n'est autre que la projection du vecteur contrainte suivant la normale extérieure  $\mathbf{n}$  de la surface de l'outil :

$$\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.14)$$

Dans le cas d'un contact bilatéral collant, on impose à la surface en contact  $\partial\Omega_c$  de se déplacer à la même vitesse que l'outil, autrement :

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_{out} = 0 \quad \text{Sur } \partial\Omega_c \quad (4.15)$$

#### Loi de frottement

Le type de contact (unilatéral ou bilatéral) traite de la composante normale du vecteur contrainte. Cependant, la composante tangentielle est indépendamment régie par la loi de frottement. Ainsi, pour une loi simple de frottement de type Coulomb, la contrainte tangentielle est liée à la contrainte normale par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \mu(-\sigma_n) \frac{\Delta \mathbf{v}_t}{\|\Delta \mathbf{v}_t\|} \quad (4.16)$$

Où  $\mu$  est le coefficient de frottement considéré comme constant.  $\boldsymbol{\sigma}_t$  et  $\Delta \mathbf{v}_t$  sont respectivement la contrainte tangentielle et la vitesse relative du glissement tangentielle, elles sont définies comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_t &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n} \\ \Delta \mathbf{v}_t &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{out}) - ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.17)$$

D'autres types de loi de frottement (Tresca, Norton) sont disponibles dans Forge3®, cependant dans nos applications, on fera uniquement appel à la loi de Coulomb.

## 4.5. Loi de comportement élasto-plastique continue

Le comportement élasto-plastique a déjà été abordé en début du chapitre 2, nous rappelons dans ce qui suit les principales équations.

Les équations constitutives du comportement élasto-plastique reposent sur une décomposition additive du tenseur taux de déformation :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (4.18)$$

Le tenseur de déformation élastique est relié au tenseur des contraintes par le tenseur  $\mathbf{D}^e$  des propriétés élastiques :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (4.19)$$

Le comportement plastique est défini par la surface de charge :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \bar{\sigma} - \sigma_u(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \leq 0 \quad (4.20)$$

Où  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  correspondent respectivement à la déformation plastique équivalente et au taux de déformation plastique équivalent. Celles-ci sont définies par :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(t) = \int_0^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\tau) d\tau \quad (4.21)$$

et

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (4.22)$$

Le tenseur taux de déformation plastique est défini suivant la normale à la surface de charge par:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.23)$$

$\lambda$  est le multiplicateur plastique qui définit l'intensité de la déformation. En vertu de l'homogénéité de la surface de charge (chapitre 2 §1.4) et en partant du principe de l'équivalence du travail, il est possible de montrer que  $d\lambda = d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ .

Par ailleurs, il est important de souligner que la loi élasto-plastique peut être généralisée en une loi élasto-viscoplastique et ce en introduisant la viscosité dans la loi d'écrouissage qui devient:

$$\sigma_u = K \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^n} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^m} \quad (4.24)$$

Où  $K$  est la constante du matériau,  $n$  le coefficient d'écrouissage et  $m$  le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

Outre la description de loi de comportement élastique pure et la loi plastique pure, les équations de Prandtl Reuss sont nécessaires pour définir les conditions de transition entre ces deux lois. Ces équations postulent :

$$\begin{aligned}
 \text{élastique} \quad & \text{si } f(\sigma, \bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p) < 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} < 0 \\
 & \text{alors } \dot{\epsilon}^e = \mathbf{D}^{e-1} : \dot{\sigma} \\
 & \dot{\epsilon}^p = 0 \\
 & \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e \\
 \\ 
 \text{élastoplastique} \quad & \text{si } f(\sigma, \bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p) \leq 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} > 0 \\
 & \text{alors } \dot{\epsilon}^e = \mathbf{D}^{e-1} : \dot{\sigma} \\
 & \dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \text{ (avec } \lambda > 0) \\
 & \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Pour le cas d'un comportement élastique isotrope, la relation entre le tenseur de déformation et de contrainte s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\dot{\sigma}) \mathbf{I} \tag{4.26}$$

$\nu, E$  sont respectivement le coefficient de Poisson et le module de Young,  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre 2. Dans le cadre des relations biunivoques en comportement élastique, l'équation précédente peut se mettre sous une autre forme :

$$\dot{\sigma} = \lambda (\text{trace}(\dot{\epsilon}^e)) \mathbf{I} + 2\mu \dot{\epsilon}^e \tag{4.27}$$

Où  $(\lambda, \mu)$  sont les coefficients de Lamé définis par la relation (2.4). Tout comme le comportement élastique, pour un comportement élasto-plastique, il est possible d'écrire une relation matricielle reliant le tenseur taux de déformations au tenseur taux des contraintes [Bellet et al, 1994]:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\sigma} &= \left[ \mathbf{D}^e - \frac{\left( \mathbf{D}^e : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \otimes \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{D}^e \right)}{\frac{\partial \sigma_u}{\partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{dt} \frac{\partial \sigma_u}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{D}^e : \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \right] : \dot{\epsilon} = \mathbf{D}^{ep} : \dot{\epsilon} \\ \dot{\epsilon}^p &= \left[ \mathbf{1} - \mathbf{D}^{e-1} : \mathbf{D}^{ep} \right] : \dot{\epsilon} \\ \dot{\bar{\epsilon}}^p &= \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p \end{aligned} \right. \tag{4.28}$$

Où le tenseur d'ordre 4  $\mathbf{D}^{ep}$  correspond au module tangent élasto-plastique.

On note qu'à la différence du tenseur élastique  $\mathbf{D}^e$ , fonction uniquement des paramètres du matériau et donc constant au cours du chargement, le module  $\mathbf{D}^p$  dépend de l'état de contrainte ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) et de l'état de déformation ( $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p$ ).

En définitif, le comportement élasto-plastique est régi par le système d'équation (4.28) correspondant à une équation différentielle continue de premier ordre non linéaire en  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\varepsilon})$  et à coefficients non constants.

Du fait de l'incompressibilité de la déformation plastique, il est commode de décomposer les tenseurs de contrainte et de déformation en partie sphérique et partie déviatorique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{I} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) \mathbf{I} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} - p \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (4.29)$$

On note par  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  le tenseur déviatorique des taux de déformation,  $\mathbf{s}$  le tenseur déviatorique des contraintes et  $p$  la pression hydrostatique.

## 4.6. Formulation faible du problème

### 4.6.1. Formulation faible continue ou principe des travaux virtuels

A partir des deux équations 'fortes' du problème d'équilibre (conservation de la quantité de mouvement et conservation de la masse) et en tenant compte de la décomposition en partie sphérique et déviatorique de la contrainte, la formulation faible mixte en vitesse pression du problème est déduite en multipliant les deux équations de conservation (4.6 et 4.9) par des fonctions tests et en les intégrant sur le domaine  $\Omega$ . Après transformation moyennant le théorème de Green, le problème devient :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (\mathbf{v}, p) \in \mathcal{V} \times P \\ & \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{s}(\mathbf{v}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}^*) d\Omega - \int_{\Omega} p \cdot \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}^*)) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}^* ds = 0 \quad \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^0 \\ \int_{\Omega} p^* \left( \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v})) + \frac{\dot{p}}{\chi} \right) d\Omega = 0 \quad \forall p^* \in P \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Où le vecteur  $\bar{\mathbf{T}}$  correspond au vecteur des efforts extérieurs calculé sur la frontière  $\partial\Omega$  de normale extérieure  $\bar{\mathbf{n}}$  par  $\bar{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ .

$\mathcal{V} = (H^1(\Omega))^3$  correspond à l'espace des vitesses cinématiquement admissibles,  
 $\mathcal{V}^0 = (H^1(\Omega))^3$  définit l'espace des vitesses cinématiquement admissibles, nulles sur la frontière,  
 $P = L^2(\Omega)$  l'espace des pressions.

### 4.6.2. Formulation discrète

La discrétisation par la méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine continu  $\Omega$  en un ensemble fini de sous domaines  $\Omega_e$  appelés éléments et vérifiant :

$$\Omega \approx \bigcup_{\Omega_e} \Omega_e \quad (4.31)$$

Au niveau de chaque élément, des fonctions d'interpolations sont définies afin d'approcher le champ de vitesse et de pression. En introduisant ces fonctions d'interpolation, le problème faible initialement de dimension infinie, est réduit à la recherche d'une solution de dimension finie dans les sous espaces  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  et  $P_h \subset P$ . Le problème discret s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (\mathbf{v}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times P_h \\ & \begin{cases} \int_{\Omega_h} \mathbf{s}(\mathbf{v}_h) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}_h^*) d\Omega_h - \int_{\Omega_h} p_h \cdot \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}_h^*)) d\Omega_h - \int_{\partial\Omega_h} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_h^* ds_h = 0 & \forall \mathbf{v}_h^* \in \mathcal{V}_h^0 \\ \int_{\Omega_h} p_h^* \left( \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}_h)) + \frac{\dot{p}_h}{\chi} \right) d\Omega_h = 0 & \forall p_h^* \in P_h \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Cependant, les fonctions d'approximation des champs de vitesse et de pression ne peuvent être choisies arbitrairement. En effet, à défaut de vérifier le critère de compatibilité de Brezzi-Babuška (qui définit une condition nécessaire et suffisante pour assurer la compatibilité entre les deux fonctions d'approximation), l'existence et l'unicité de la solution du problème faible n'est plus assurée.

Une première étude a été menée au CEMEF par [Coupez, 1991] pour le cas d'un problème de Stokes et a conduit au choix du mini-élément linéaire P1+/P1. Cet élément satisfait les conditions de compatibilité, et allie à la fois une précision suffisante et un coût de calcul peu cher comparé à un élément compatible d'ordre supérieur tel l'élément P2/P1 [Gay, 1995].

L'élément P1+/P1 est un élément tétraédrique qui correspond aux interpolations suivantes :

- La pression est interpolée par un polynôme de degré 1, elle est donc linéaire et continue.
- La vitesse se décompose en partie linéaire et partie bulle :

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_l + \mathbf{b} \quad (4.33)$$

La bulle est une fonction affine par morceau qui s'annule sur le bord [Coupez, 1991] et qui assure la compatibilité de l'élément. Les nouveaux espaces d'approximation des champs de vitesse et de pression sont définis par :

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_h = \mathcal{V}_l \oplus B_h \\ & B_h = \left\{ b \in (C^0(\Omega_h))^3 / \forall e \in T_h, b|_{\Omega_h^{e,i}} \in (P^1(\Omega_h^{e,i}))^3 = 0 \text{ et } b = 0 \text{ sur } \partial\Omega_h^{e,i} \right\} \\ & \mathcal{V}_l = \left\{ \mathbf{v}_l \in (C^0(\Omega_h))^3 / \forall e \in T_h, \mathbf{v}_l|_{\Omega_h^e} \in (P^1(\Omega_h^e))^3 \right\} \\ & P_h = \left\{ p_h \in (C^0(\Omega_h)) / \forall e \in T_h, p_h|_{\partial\Omega_h^e} \in (P^1(\Omega_h^e)) \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

On note par  $P^l$  le polynôme d'interpolation linéaire,  $T_h$  l'ensemble des éléments (topologie).  $\Omega_h^{e,i}$  ( $i=1,4$ ) sont les sous-tétraèdres (Figure 4.1).

Pour tout point  $x$  du domaine  $\Omega_h$  appartenant à un élément donné  $e$ , le champ de vitesse et de pression s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h(x) &= N_n \mathbf{v}_n^l + N_b \mathbf{b} \\ P_h(x) &= N_n P_n \end{aligned} \quad (4.35)$$

Où  $\mathbf{v}_n^l \{n=1..4\}$  représente la vitesse linéaire de chaque nœud  $n$  de l'élément  $e$ ,  $\mathbf{b}$  est le champ bulle et  $P_n \{n=1..4\}$  la pression nodale. Les fonctions d'interpolation  $N_n \{n=1..4, b\}$  sont définies pour un élément de référence par :

$$\begin{cases} N_1 = \xi \\ N_2 = \eta \\ N_3 = \zeta \\ N_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta \end{cases} \quad \begin{cases} \text{sur } 1-3-4-b & N_b^1 = 4\xi \\ \text{sur } 1-4-2-b & N_b^2 = 4\eta \\ \text{sur } 1-2-3-b & N_b^3 = 4\zeta \\ \text{sur } 2-4-3-b & N_b^4 = 4(1 - \xi - \eta - \zeta) \end{cases} \quad (4.36)$$

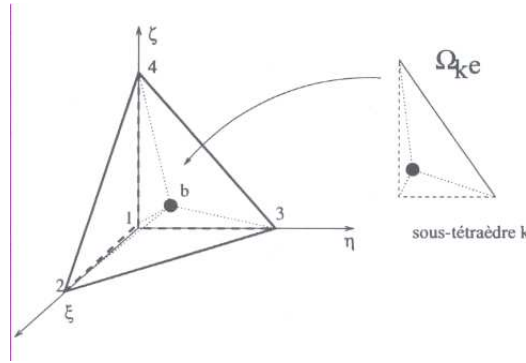


Figure 4.1 : Elément de référence P1+/P1.

Le nouveau problème discret s'écrit donc :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } (\mathbf{v}_l, \mathbf{b}, P_h) \in \mathcal{V}_l \times B_h \times P_h : \\ &\begin{cases} \int_{\Omega_h} \mathbf{s}(\mathbf{v}_l + \mathbf{b}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l(\mathbf{v}_l^*) d\Omega_h - \int_{\Omega_h} p_h \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l(\mathbf{v}_l^*)) d\Omega_h - \int_{\partial\Omega_h} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_l^* ds_h = 0 & \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_l^0 \\ \int_{\Omega_h} \mathbf{s}(\mathbf{v}_l + \mathbf{b}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l(\mathbf{b}^*) d\Omega_h - \int_{\Omega_h} p_h \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l(\mathbf{b}^*)) d\Omega_h - \int_{\partial\Omega_h} \bar{\mathbf{T}} \mathbf{b}^* ds_h = 0 & \forall \mathbf{b}^* \in B_h \\ \int_{\Omega_h} p_h^* \left( \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l(\mathbf{v}_l + \mathbf{b})) + \frac{\dot{p}_h}{\chi} \right) d\Omega_h = 0 & \forall p^* \in P_h \end{cases} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dans cette écriture les deux premières équations sont couplées puisque le tenseur  $\mathbf{s}$  s'écrit en fonction de  $(\mathbf{v}_l$  et  $\mathbf{b})$ .



En supposant que le multiplicateur plastique est fonction uniquement de la partie linéaire du champ de vitesse et moyennant certaines propriétés de la bulle, Aliaga [Aliaga, 2000] démontre qu'il est possible de transformer le problème en un système d'équations non linéaires découplées en  $(\mathbf{v}_l$  et  $\mathbf{b}$ ) :

trouver  $(\mathbf{v}_l, b, p_h) \in \mathcal{V}_l \times B_h \times P_h$  telque  $\forall (\mathbf{v}_h^*, b^*, p_h^*) \in \mathcal{V}_l^0 \times B_h \times P_h$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_h} \mathbf{s}(\mathbf{v}_l) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}_l^*) d\Omega_h - \int_{\Omega_h} p_h \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}_l^*)) d\Omega_h - \int_{\partial\Omega_e} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_l^* ds = 0 \\ \int_{\Omega_h} \mathbf{s}(\mathbf{b}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b}^*) dv - \int_{\Omega_h} p_h \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b}^*)) dv - \int_{\partial\Omega_h} \bar{\mathbf{T}} \mathbf{b}^* ds = 0 \\ \int_{\Omega_h} p_h^* \left( \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}_l + \mathbf{b}_h)) + \frac{\dot{p}_h}{\chi} \right) d\Omega_h = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

En vertu de la méthode de Galerkin standard (fonctions test correspondant aux fonctions d'interpolations), le problème précédent peut se mettre sous la forme synthétique suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_e^v(v_e^l, p_e) &= \mathbf{R}_e^{vv} + 0 + \mathbf{R}_e^{vp} = 0 \\ \mathbf{R}_e^b(b_e, p_e) &= 0 + \mathbf{R}_e^{bb} + \mathbf{R}_e^{bp} = 0 \\ \mathbf{R}_e^p(v_e^l, b_e, p_e) &= \mathbf{R}_e^{pv} + \mathbf{R}_e^{pb} + \mathbf{R}_e^{pp} = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

A noter que l'indice  $e$  indique que les termes sont calculés au niveau de chaque élément. La résolution du problème global est effectuée après assemblage de l'ensemble des matrices locales. Nous remarquerons aussi que le découplage entre la partie linéaire du champ du vitesse et la composante bulle se traduit par les deux termes nuls qui apparaissent au niveau de la première et deuxième équation du système (4.39).

### 4.6.3. Discrétisation temporelle

La simulation de la mise en forme correspond à un problème instationnaire, c'est pourquoi l'espace temps est discrétisé en plusieurs incréments. L'équilibre est supposé satisfait à un incrément  $t$ , il est ensuite perturbé en actualisant son chargement extérieur. Le problème se ramène alors à la détermination des champs de vitesse et de pression qui assurent le respect de l'équation du nouvel équilibre à  $t + \Delta t$ , l'équation d'équilibre étant écrite sur la configuration recherchée.

Une fois le champ de vitesse solution du problème trouvé, le maillage est alors actualisé selon le chemin d'intégration explicite suivant:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \cdot \mathbf{v}(t) \quad (4.40)$$

D'autres méthodes d'actualisation d'ordre supérieur (Runge-Kutta) ont été développées dans Forge3® par [Boyère, 1999]. Ces méthodes offrent l'avantage d'une meilleure précision dans le calcul de l'actualisation du maillage d'une manière générale et s'avèrent indispensables pour la simulation des procédés dont la cinématique met en jeu des mouvements de rotation (laminage circulaire, ..) et pour lesquels un schéma d'actualisation explicite (4.40) conduirait à un gonflement numérique du maillage

[Bellet et al, 1994]. Dans cette étude, on utilisera le schéma d'intégration (4.40) suffisant pour décrire le procédé d'hydroformage.

Pour résumer, et après discrétisation temporelle, le problème (4.39) à résoudre en début de chaque incrément s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{enk}^{vv} &= \int_{\Omega_0} s_{ij}^l(\mathbf{v}_{t+\Delta t}^l) B_{ijkn}^l J(x^{t+\Delta t}) dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} T_k(\mathbf{v}_{t+\Delta t}^l) N_n J'(x^{t+\Delta t}) dS_0 \\ R_{enk}^{vp} &= - \int_{\Omega_0} p_m^{t+\Delta t} N_m \frac{\partial N_n}{\partial x_k} J(x^{t+\Delta t}) dv_0 \\ R_{ek}^{bb} &= \int_{\Omega_0} s_{ij}^b(\mathbf{b}_{t+\Delta t}^b) B_{ijk}^b J(x^{t+\Delta t}) dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} T_k(\mathbf{v}_{t+\Delta t}^l) N_b J'(x^{t+\Delta t}) dS_0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} R_{ek}^{bp} &= - \int_{\Omega_0} p_m^{t+\Delta t} N_m \frac{\partial N_b}{\partial x_k} J(x^{t+\Delta t}) dv_0 \\ R_{ek}^{pv} &= - \int_{\Omega_0} N_k \left[ \frac{\partial N_n}{\partial x_j} v_{jn}^{t+\Delta t} + \frac{\partial N_b}{\partial x_j} b_j^{t+\Delta t} \right] J(x^{t+\Delta t}) dv_0 \\ R_{ek}^{pp} &= - \int_{\Omega_0} N_k N_m \frac{p_m^{t+\Delta t} - p_m^0}{\chi} J(x^{t+\Delta t}) dv_0 \end{aligned}$$

Les intégrales précédentes sont définies par rapport à l'élément de référence,  $J, J'$  sont respectivement les Jacobiens volumique et surfacique permettant la transformation entre l'élément courant  $\Omega_e$  et l'élément de référence  $\Omega_0$ .

Les tenseurs  $B^l$  et  $B^b$  sont définis à partir des équations (4.5) et (4.35) comme :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= B_{ijkn}^l v_{kn} + B_{ijk}^b b_k \\ B_{ijkn}^l &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial N_n}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \delta_{jk} \right]; \quad B_{ijk}^b = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial N_b}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial N_b}{\partial x_i} \delta_{jk} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

Où  $\delta_{ij}$  correspond au symbole de kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ; 0 sinon).

Signalons par ailleurs, que la dépendance du tenseur des contraintes  $\mathbf{s}$  en fonction du champ de vitesse linéaire  $v_i$ , rend le problème fortement non linéaire.

L'écriture de l'équation d'équilibre à  $t + \Delta t$  fait donc apparaître deux types de non linéarités :

- Une non linéarité de comportement par l'intermédiaire du tenseur des contraintes (relation non linéaire entre le tenseur déviateur des contraintes et le champ des vitesses pour une loi de type élasto-plastique).
- Une non linéarité géométrique puisque les intégrales sont écrites sur une configuration elle-même dépendante du champ de vitesse recherché. Ceci se traduit par des jacobiens fonctions du champ de vitesse.

Dans l'actuel formulation de Forge3® et afin de simplifier le problème, cette non linéarité est éliminée en adoptant une intégration du problème sur la configuration du début d'incrément (intégration explicite). Cette hypothèse reste justifiée pour de faibles pas de temps.

Le système (4.41) étant non linéaire, une procédure de linéarisation itérative par la méthode de Newton-Raphson est utilisée. A chaque itération, le problème se ramène à la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} K_e^{vv} & 0 & K_e^{vp} \\ 0 & K_e^{bb} & K_e^{bp} \\ {}^T K_e^{vp} & {}^T K_e^{bp} & K_e^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_e \\ \delta b_e \\ \delta p_e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_e^v \\ R_e^b \\ R_e^p \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Où les termes  $K_e^{xy}$  correspondent à :

$$\mathbf{K}_e^{xy} = \frac{\partial \mathbf{R}^x(x, y)}{\partial y} \text{ avec } (xy) = \{(vv); (vp); (pv); (bb); (bp); (pb); (pp)\} \quad (4.44)$$

$(\delta v_e^l, \delta b_e, \delta p_e)$  sont les corrections apportées aux champs  $(v_e^l, b_e, p_e)$  à chaque itérations.

Dans la pratique, le système algébrique (4.43) est simplifié [Aliaga, 2000] en éliminant le champ bulle qui n'apparaît plus dans les expressions matricielles et vectorielles. La contribution de la bulle est alors présente de manière sous-jacente par l'intermédiaire de sa raideur  $K_e^{bb}$  dans la matrice de condensation  $C_e$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{vv} & \mathbf{K}_e^{vp} \\ {}^T \mathbf{K}_e^{vp} & \mathbf{K}_e^{pp} - \mathbf{C}_e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_e \\ \delta p_e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_e^v \\ \mathbf{R}_e^{pv} + \mathbf{R}_e^{pp} - {}^T \mathbf{K}_e^{bp} (\mathbf{K}_e^{bb})^{-1} \mathbf{R}_e^b \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Où,  $\mathbf{C}_e = {}^T \mathbf{K}_e^{bp} (\mathbf{K}_e^{bb})^{-1} \mathbf{K}_e^{bp}$  est la matrice de condensation locale de la bulle. Grâce à cette substitution (condensation) la taille des matrices de raideur locale, initialement (19x19), est réduite à (16X16) soit 16 degrés de liberté. Après assemblage des matrices locales, et une fois le système linéaire global résolu, la reconstitution du champ bulle n'est plus utile. En effet, la bulle n'apporte que des corrections d'ordre 2 alors que l'approximation éléments finis recherchée est en théorie d'ordre 1. Par conséquent il est inutile d'en tenir compte en dehors du terme de stabilisation  $C_e$ . L'exploitation sous la forme mini élément du tétraèdre P1+/P1 conduit donc à une réduction considérable du temps de calcul; d'une part en éliminant la construction du champ bulle et d'autre part en utilisant un seul point de Gauss, au lieu de quatre dans le cas du système couplé en  $v_i$  et  $b$ .

Les termes du système (4.45) sont explicités dans ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 K_{e\ nklm}^{vv} &= \frac{\partial R_{e\ nk}^{vv}}{\partial v_{lm}^l} = \int_{\Omega_0} B_{jkn}^l C_{ijpq}^l B_{pqlm}^l J(x^t) dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial T_k}{\partial v_{lm}^l} N_n J'(x^t) ds_0 \\
 K_{e\ nkl}^{vp} &= \frac{\partial R_{e\ nk}^{vp}}{\partial p_l} = - \int_{\Omega_0} N_l \frac{\partial N_n}{\partial x_k} J(x^t) dv_0 \\
 K_{e\ lk}^{pp} &= \frac{\partial R_{e\ l}^{pp}}{\partial p_k} = - \int_{\Omega_0} N_l N_k \frac{J(x^t)}{\chi} dv_0 \\
 K_{e\ lk}^{bb} &= \frac{\partial R_{e\ l}^{bb}}{\partial b_k} = \int_{\Omega_0} B_{ijk}^b C_{ijpq}^b B_{pqkl}^b J(x^t) dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial T_k}{\partial b_k} N_b J'(x^t) ds_0 \\
 K_{e\ lk}^{bp} &= \frac{\partial R_{e\ l}^{bp}}{\partial p_k} = - \int_{\Omega_0} N_k \frac{\partial N_b}{\partial x_l} J(x^t) dv_0
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Les remarques suivantes peuvent être soulignées:

- On voit apparaître le module tangent linéaire ( $\mathbf{C}^l$ ) ainsi que le module tangent bulle ( $\mathbf{C}^b$ ) définis par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^l &= \frac{\partial \mathbf{s}^l}{\partial \Delta \mathbf{e}(\mathbf{v}_e^l)} \\
 \mathbf{C}^b &= \frac{\partial \mathbf{s}^b}{\partial \Delta \mathbf{e}(\mathbf{b}_e)}
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Ces termes sont calculés par la résolution du deuxième aspect du problème mécanique relatif à la loi de comportement (élastique, élasto-plastique, élasto-visco-plastique).

- Dans le calcul des termes de la matrice de rigidité (matrice Hessienne), les termes  $\partial \mathbf{B} / \partial \mathbf{V}$ ,  $\partial J / \partial \mathbf{V}$ ,  $\partial J' / \partial \mathbf{V}$  représentant l'effet de variation du domaine au cours d'un incrément sont négligés, les intégrales sont définies sur le domaine du début d'incrément, tout comme l'ont été les termes du résidu. On étudiera avec de plus amples détails la validité de cette hypothèse dans le chapitre suivant.

- L'effort extérieur peut varier au cours de l'incrément (c'est le cas des forces suiveuses : pression imposée). Les termes d'intégrales surfaciques qui apparaissent au niveau des équations du système précédent (4.46), prennent en compte cette variation. Dans Forge3® ces termes sont également supposés de second ordre et ne sont pas pris en considération dans le calcul de la matrice Hessienne. Tout comme les termes volumiques, ils seront étudiés avec plus de détails dans le chapitre suivant.

La discrétisation par éléments finis ainsi que la discrétisation temporelle ont donc ramené la résolution du problème non linéaire d'équilibre discret à la résolution d'un système linéaire de dimension 4 fois le nombre de nœud. La matrice globale de ce système est obtenue par assemblage de l'ensemble des matrices élémentaires  $K_e$  calculées (4.46) pour chaque élément du maillage. Pour résoudre ce système, généralement de taille assez conséquente lorsqu'il s'agit de la simulation d'une pièce industrielle, un solveur itératif de type résidu minimal est utilisé. Ce solveur est utilisé avec plusieurs pré-

conditionneurs, en particulier le pré-conditionneur Choleski incomplet ou diagonale conduisant à une amélioration de la convergence.

#### 4.6.4. Gestion incrémentale du contact

Au cours de la simulation, les nœuds se trouvant au voisinage de l'outillage sont analysés afin de détecter d'éventuelle entrée ou sortie de contact. Soit un nœud se trouvant à la distance  $d(t)$  de l'outillage à l'instant  $t$ . Ce nœud de la pièce étant à l'extérieur de l'outillage, on choisit par convention que la signe de la distance  $d(t)$  soit positif :

$$d(t) \geq 0 \quad (4.48)$$

A l'opposé, dès que le nœud est à l'intérieur de l'outil, la distance est alors de signe négatif.

Au cours de l'incrément, la pièce peut se déformer et le nœud en question peut se retrouver à l'intérieur de l'outillage conduisant ainsi à une situation non physique. Pour éviter cette configuration, la condition de non pénétration doit être respectée en fin d'incrément, autrement dit :

$$d(t + \Delta t) \geq 0 \quad (4.49)$$

Après développement, cette expression peut être linéarisée au premier ordre selon la relation suivante [Mocellin, 1999]:

$$d(t + \Delta t) = d(t) + (\mathbf{v}_{out} - \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{n}(t) \cdot \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (4.50)$$

La condition de non pénétration (4.50) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$[h(v(t))]^+ = \begin{cases} h(v(t)) & \text{si } h(v(t)) \geq 0 \\ 0 & \text{si } h(v(t)) < 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

Où la fonction  $h$  s'exprime comme :

$$h(v(t)) = (v(t) - v_{out}) \cdot \mathbf{n}(t) - \frac{d(t)}{\Delta t} \quad (4.52)$$

Cette expression est à la fois implicite, dans la mesure où la condition de non pénétration a été définie à l'instant  $(t + \Delta t)$ , mais elle reste aussi explicite puisque la normale  $\mathbf{n}$  et la distance  $d$  sont définies à l'instant  $(t)$  alors qu'elles évoluent au cours de l'incrément. En outre, le fait de supposer la normale constante au cours de l'incrément revient à approcher la surface de l'outillage par un plan de normale  $\mathbf{n}$ . Ceci peut entraîner, dans certaines conditions, l'interdiction d'un déplacement licite (Figure 4.2-a) ou au contraire tolérer des déplacements illicites (Figure 4.2-b). Pour palier à ces limitations, une autre méthode incrémentale implicite reposant sur une actualisation de la normale au cours des itérations de Newton Raphson a été développée par [Mocellin, 1999], cette méthode a montré une amélioration dans la précision géométrique (pénétration dans l'outillage) des pièces cependant elle conduit à des oscillations numériques et un coût de calcul plus élevé qu'une méthode explicite.

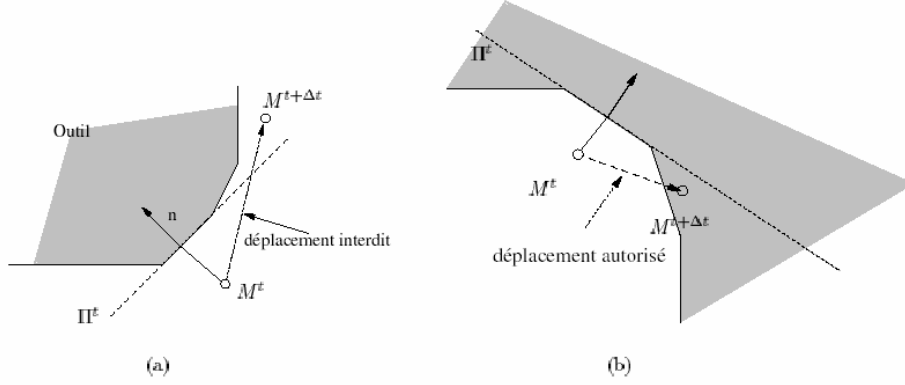


Figure 4.2 : Erreur due à l'approximation de l'outillage par une surface plane. a/ le champ de vitesse est interdit, b/ le champ de vitesse est accepté [Mocellin, 1999].

Pour tenir compte des conditions de contact dans la formulation du problème d'équilibre, une méthode de pénalisation est utilisée. La contrainte de non pénétration est imposée grâce un coefficient de pénalisation  $\rho$ , le problème faible s'écrit pour un contact nodal sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (\mathbf{v}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times P_h \\ & \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \mathbf{s} : \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_h^*) d\Omega_h - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_h^*)) d\Omega_h - \int_{\partial\Omega_p} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}_h^* ds_h \\ & + \rho \sum_{x_k \in \partial\Omega_c} [h(\mathbf{v}(x_k))]^+ \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_h^* s(x_k) - \int_{\partial\Omega_c} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h^* ds_h = 0 \\ & \int p_h^* \left[ \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{e}}_h) + \frac{\dot{p}_h}{\chi} \right] d\Omega_h = 0 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} & \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_h^0 \\ & \forall p^* \in P_h \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le contact étant nodal, dans l'équation d'équilibre la contribution du contact est donc définie par une sommation sur les nœuds en contact où les termes  $s(x_k)$  correspondent à la surface associée au nœud  $k$ . A noter qu'il est aussi possible d'établir une formulation intégrée du contact [Mocellin, 1999] avec une contribution du contact calculée au niveau des points de Gauss et non plus au niveau des nœuds. Physiquement, la pénalisation revient à imposer un effort de répulsion aux nœuds pénétrants dans l'outillage, cet effort est proportionnel à la distance de pénétration :

$$\sigma_n = -\rho [h(v(t))]^+ \quad (4.54)$$

La méthode de pénalisation nécessite la définition de deux paramètres géométriques supplémentaires :

*dpen* : Cette variable correspond à la distance de pénétration maximale autorisée au-delà de laquelle la condition de non pénétration (4.52) est appliquée (en pratique ce paramètre correspond à 1/100 de l'épaisseur de la tôle).

*dpen+* : Afin d'éviter une analyse systématique sur tous les nœuds surfaciques de la pièce, ce paramètre définit le rayon minimal pour lequel l'opération d'analyse de contact est effectuée, il est généralement pris égal à la moitié de l'épaisseur de la tôle.

#### 4.6.5. Intégration de la loi de comportement

Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour intégrer l'équation différentielle de loi de comportement (4.28). Dans Forge3®, le problème est intégré par une méthode incrémentale implicite.

Le problème consiste à calculer en fin d'incrément l'état de contrainte et de déformation plastique  $\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^p(t + \Delta t)$ , connaissant ces mêmes grandeurs en début d'incrément ( $\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}^p(t)$ ), et pour un incrément de déformation total  $\Delta \mathbf{e}$  donné.

#### 4.6.5.1. Écriture incrémentale

La résolution des équations d'équilibre fournit le tenseur taux de déformation  $\dot{\mathbf{e}}$ , pour lequel on suppose que l'incrément de déformation  $\Delta \mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} \Delta t$  est constant au cours de l'incrément. Pour déterminer les autres grandeurs, l'écriture continue du problème est transformée en une écriture incrémentale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}^e + \dot{\mathbf{e}}^p \\ \dot{\mathbf{e}}^e = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{2\mu} \\ \dot{\mathbf{e}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \\ f(\mathbf{s}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}) = 0 \\ \dot{p} = -\frac{3\lambda + 2\mu}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{e}^e + \Delta \mathbf{e}^p \\ \Delta \mathbf{e}^e = \frac{\Delta \mathbf{s}}{2\mu} \\ \Delta \mathbf{e}^p = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s}} \\ f\left(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\Delta t}\right) = 0 \\ \Delta p = -\frac{3\lambda + 2\mu}{3} \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \end{array} \right. \quad (4.55)$$

L'écriture discrète (incrémentale) des équations de comportement conduit à un problème récurrent en calcul incrémental à savoir la définition de la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s}}$  dans la troisième équation du système.

Suivant la valeur du paramètre  $\alpha$ , on distingue différentes méthodes :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \alpha = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{s}) & : \text{La méthode d'intégration est explicite.} \\ \text{si } \alpha = 1 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}) & : \text{La méthode est implicite ou appelée encore méthode de retour radial.} \\ \text{si } \alpha \neq 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s}) & : \text{Il s'agit dans ce cas de la méthode du « point milieu généralisé »} \end{array}$$

Bien que le coût de calcul de la méthode implicite soit plus élevé que celui de la méthode explicite, celle-ci offre une bien meilleure précision et une plus grande robustesse [Bellet et al, 1994]. Elle a été retenue pour l'intégration des lois de comportement.

Les équations déviatoriques incrémentales à résoudre sont donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{e} - \mathbf{D}^{e-1} : \Delta \mathbf{s} = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \Big|_{\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}} \\ \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \Delta \lambda \\ f\left(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \frac{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\Delta t}\right) = 0 \end{array} \right. \quad (4.56)$$

Où la première équation n'est autre que la combinaison des trois premières équations du système (4.55).

#### 4.6.5.2. Intégration du critère quadratique de Hill

##### **a. Résolution locale**

Le critère de Hill<sup>48</sup> peut se mettre sous la forme tensorielle suivante :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{mat} : \tilde{\mathbf{P}} : \boldsymbol{\sigma}^{mat}} \quad (4.57)$$

Le tenseur  $\tilde{\mathbf{P}}$  d'ordre 4 regroupe les paramètres d'anisotropie du critère de Hill.

Comme on l'a présenté (chapitre 2, §1.3.2.1), le critère de Hill est défini dans le repère orthotrope du matériau. Cependant, dans Forge3® les tenseurs des contraintes et des déformations sont calculés dans un repère global fixe. Pour pouvoir appliquer le critère de Hill, il est donc nécessaire d'effectuer une rotation entre le repère global, et le repère du matériau. Si on note par  $\boldsymbol{\sigma}_{mat}$  le tenseur des contraintes exprimé dans le repère orthotrope (repère du matériau) et par  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes écrit dans le repère global, ces deux tenseurs sont liés par la matrice de rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  :

$$\sigma_{ij}^{mat} = \bar{R}_{ik} \bar{R}_{jl} \sigma_{kl} \quad (4.58)$$

La matrice de rotation est sensée décrire la rotation plastique du repère matérielle, elle est déduite de la décomposition polaire du tenseur gradient de transformation. En effet, soit  $x$  la coordonnée d'un point matériel à l'instant  $t$ , et  $X$  sa coordonnée initiale, le tenseur gradient de transformation est calculé par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.59)$$

Le tenseur est ensuite décomposé d'une manière unique sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (4.60)$$

Où  $\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal décrivant la rotation et  $\mathbf{U}$  tenseur symétrique défini positif décrivant les elongations. Dans les expressions (4.58)  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T$ .

En remplaçant l'équation (4.58) dans (4.57), il est possible de garder la même forme tensorielle de la contrainte équivalente exprimée cette fois dans le repère global :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P} : \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.61)$$

Le nouveau tenseur des paramètres d'anisotropie  $\mathbf{P}$  est déduit du tenseur  $\tilde{\mathbf{P}}$  par :

$$\tilde{P}_{mnpq} = \bar{R}_{im} \bar{R}_{jn} \bar{R}_{kp} \bar{R}_{lq} P_{ijkl} \quad (4.62)$$

En partant des équations (4.61), la normale à la surface de charge peut être exprimée en fonction du tenseur déviateur des contraintes et du multiplicateur plastique comme suit:



$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\mathbf{s}+\Delta \mathbf{s}} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{P} : (\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s})}{\left( \frac{3}{2} (\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}) : \mathbf{P} : (\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}) \right)^{1/2}} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{P} : (\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s})}{\sigma_u \left( \bar{\varepsilon}^p + \Delta \lambda, \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right)} \quad (4.63)$$

En introduisant (4.63) dans la première équation du système (4.56), cette dernière devient :

$$(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}) : \left( \mathbf{I} + \Delta \lambda \frac{3}{2} \frac{\mathbf{D}^e : \mathbf{P}}{\sigma_u \left( \bar{\varepsilon}^p + \Delta \lambda, \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right)} \right) = \mathbf{s} + \mathbf{D}^e : \Delta \mathbf{e} \quad (4.64)$$

Le terme à droite de l'équation correspond au prédicteur élastique noté par  $\mathbf{s}^t$  (Figure 4.3), et on note par  $\mathbf{A}$  le tenseur d'ordre 4 reliant le tenseur des contraintes au prédicteur élastique :

$$(\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}) : \mathbf{A}(\Delta \lambda) = \mathbf{s}^t \quad (4.65)$$

Finalement, en remplaçant cette équation dans la troisième équation du système (4.56), le problème se ramène à la résolution d'une équation scalaire non linéaire en  $\Delta \lambda$  :

$$g(\Delta \lambda) = \left[ \frac{3}{2} (\mathbf{s}^t : \mathbf{A}^{-1}(\Delta \lambda)) : \mathbf{P} : (\mathbf{A}^{-1}(\Delta \lambda) : \mathbf{s}^t) \right]^{1/2} - \sigma_u \left( \bar{\varepsilon}^p + \Delta \lambda, \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right) = 0 \quad (4.66)$$

La résolution de cette équation est effectuée par une méthode de Newton Raphson, les détails du calcul sont donnés dans [Knockaert, 2001].

Une fois l'incrément du multiplicateur plastique calculé, le déviateur des contraintes ( $\mathbf{s}(t + \Delta t) = \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}$ ) est ensuite déduit à partir de (4.64), et le tenseur incrément de déformation plastique est aisément obtenu à partir de la dérivée de la surface de charge (4.63).

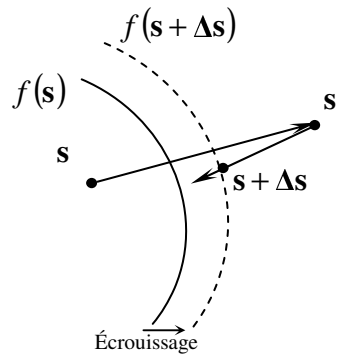


Figure 4.3 : Principe de la méthode du retour radial.

### **b. Module tangent constant**

On a pu voir plus haut (eq. 4.47) que pour résoudre le problème global, il est nécessaire de définir le module tangent linéaire (défini par rapport à la composante linéaire du champ de vitesse) et le module

tangent bulle (défini par rapport à la composante bulle du même champ de vitesse). Ce module tangent doit par ailleurs satisfaire une condition de consistance avec le chemin de discrétisation afin d'assurer la convergence optimale de l'algorithme de Newton-Raphson global [Simo, 1985]. Le module tangent continu (4.28) ne satisfaisant pas cette condition, un module tangent discret consistant est alors à définir. En s'inspirant des travaux de [de Borst et al, 1990], Knockaert [Knockaert, 2000] a défini les modules tangents discrets linéaire et bulle utilisés dans le code Forge3® par les expressions suivantes :

$$ds = \left[ \mathbf{H} - \frac{\left( \mathbf{H} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \right) \otimes \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} : \mathbf{H} \right)}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} : \mathbf{H} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} - \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \right)} \right] d\Delta \mathbf{e} \quad (4.67)$$

Où le tenseur  $\mathbf{H}$  est défini par :

$$\mathbf{H} = \left( \mathbf{I} + \Delta \lambda \cdot \mathbf{D}^e : \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{s}^2} \right)^{-1} : \mathbf{D}^e \quad (4.68)$$

Le module tangent consistant bulle est défini par :

$$ds = \left( I + \Delta \lambda \frac{3}{2} \frac{\mathbf{D}^e : \mathbf{P}}{\bar{\sigma}} \right)^{-1} : \mathbf{D}^e : d\Delta \mathbf{e} \quad (4.69)$$

#### 4.6.5.3. Dérivée objective de la contrainte

La dérivée particulaire de la contrainte telle qu'elle est définie dans l'équation continue (4.55) présente l'inconvénient d'être dépendante d'un mouvement de solide rigide. Autrement, pour une rotation solide rigide, la dérivée particulaire prévoit une dérivée temporelle de la contrainte non nulle alors que physiquement le solide n'a subi aucune déformation. Ce problème est bien connu en mécanique des milieux continus comme la non objectivité des dérivées particulières. Pour y remédier, d'autres types de dérivées temporelles permettant d'éliminer les effets de mouvement de solide rigide ont été introduites, parmi lesquelles on peut citer la dérivée classique de Jaumann ( $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}$ ) et où  $\mathbf{w}$  est la partie antisymétrique du tenseur gradient de la vitesse.

Etant données les faibles déformations (et faibles rotations) mises en jeu au cours des incréments, la dérivée temporelle particulaire des contraintes est conservée. Cependant, pour palier à sa difficulté à tenir compte des rotations rigides, le tenseur de contrainte calculé après intégration de la loi de comportement en fin d'incrément est corrigé par une rotation sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) \rightarrow \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{R} \quad (4.70)$$

Où  $\mathbf{R}$  est la matrice de rotation correspondant à la partie antisymétrique du tenseur gradient de la vitesse.

## **4.7. Maillage et remaillage**

### **4.7.1. Position du Problème**

Etant donné que la méthode des éléments finis repose sur une discrétisation du volume initial continu de matière en un ensemble d'éléments (des tétraèdres), et en présence des grandes déformations, ces éléments risquent de se dégénérer au cours de la simulation. La deuxième contrainte qu'il convient de considérer lors de la discrétisation est la nécessité de bien reproduire certains détails géométriques une fois la tôle plaquée contre la matrice.

Ceci nous amène au problème du maillage et de remaillage lors de grandes déformations d'une manière générale, et en mise forme de produits minces (par hydroformage ou par emboutissage) en particulier.

Le logiciel Forge3® est initialement dédié à la simulation de la mise en forme de pièces massives par forgeage. Il est doté d'un remailleur utile pour conserver une bonne qualité du maillage en présence de fortes déformations. Cependant, du fait que l'épaisseur étant largement inférieure aux deux autres dimensions, des difficultés de génération de maillage ont été rencontrées ; en particulier si on souhaite avoir un nombre raisonnable d'éléments dans l'épaisseur (au moins 2 éléments), il faudrait imposer une taille de maille égale à la moitié de l'épaisseur de la tôle. Un tel choix conduirait à un maillage isotrope mais trop raffiné par rapport aux dimensions de la pièce ce qui de toute évidence entraînerait des coûts de calcul exorbitants.

Récemment, un autre type de mailleur a été développé au CEMEF [Gruau, 2004]. C'est un mailleur anisotrope qui permet de contrôler la taille de maille locale dans les trois directions de l'espace d'une manière indépendante, par opposition au mailleur isotrope qui a vocation à générer des tétraèdres équilatéraux. Appliqué au cas des produits minces, ce mailleur présente l'avantage de pouvoir imposer une taille suffisamment faible suivant la direction de l'épaisseur, et de garder une taille raisonnablement grande dans les deux autres directions.

Un autre mailleur dédié aux produits minces a été également introduit au CEMEF [Novel, 1998]. Ce mailleur repose sur la définition d'une surface moyenne de la tôle, laquelle est maillée par un mailleur de surfaces gauches, cette surface est ensuite extrudée suivant la direction normale pour générer un maillage volumique.

### **4.7.2. Choix du mailleur**

Afin de choisir un mailleur parmi les deux derniers évoqués (mailleur anisotrope et mailleur à plan moyen), on présente dans ce qui suit une étude comparative simple sur un exemple de gonflage circulaire. Partant d'une portion de tôle circulaire soumise à un test de gonflage, on construit un premier maillage avec deux éléments dans l'épaisseur. De ce maillage, la surface supérieure est ensuite extraite et extrudée dans la direction de l'épaisseur pour ainsi générer un maillage structuré ayant également deux éléments dans l'épaisseur. La Figure 4.4 illustre les deux maillages générés.

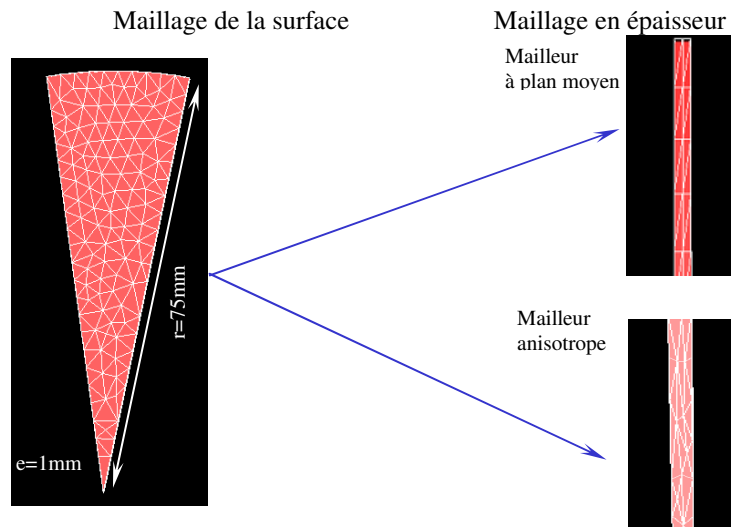


Figure 4.4: Comparaison entre maillage structuré et maillage anisotrope

De la même manière, on construit différents maillages pour lesquels la taille du maillage surfacique est variée tout en imposant 2 éléments dans l'épaisseur. Les résultats illustrés sur la Figure 4.5 montre que le mailleur anisotrope génère un maillage de taille plus conséquente qu'un mailleur à plan moyen. A ce titre, pour une taille de maille surfacique de 4mm et avec deux éléments dans l'épaisseur, le mailleur anisotrope génère 40% plus de nœuds (soit 103% plus d'éléments) que le mailleur à plan moyen.

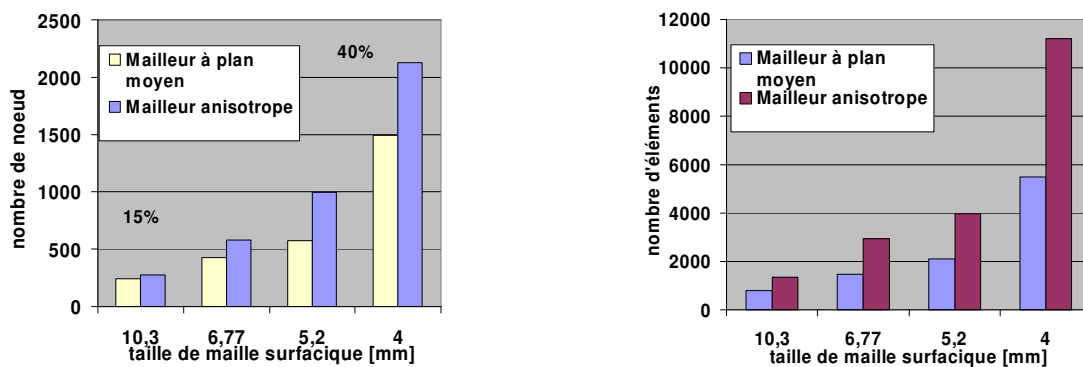
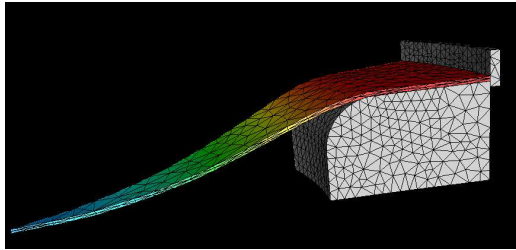


Figure 4.5: Evolution de la taille du maillage en fonction de la taille des éléments surfaciques pour les deux mailleurs; mailleur à plan moyen et mailleur anisotrope.

En comparant les temps de calcul pour l'essai de gonflage circulaire avec les deux maillages précédents (Figure 4.6), on s'aperçoit que le temps de calcul pour un maillage anisotrope est près du double du temps de calcul avec un maillage structuré. S'il est évident que la taille plus importante du maillage anisotrope entraîne systématiquement une augmentation du temps de calcul du fait que le temps d'assemblage et de résolution du système linéaire augmente, on sait néanmoins que pour un solveur linéaire itératif le temps CPU varie selon une fonction puissance ( $CPU \approx ddl^{3/2}$ ). Or les écarts observés dans le temps de calcul sont plus significatifs que ceux prévus par la loi. En fait, on a pu se rendre compte qu'en raison de l'anisotropie des éléments, le conditionnement du système

linéaire résultant de la discrétisation du problème est altéré. Comme la convergence des solveurs itératifs est très dépendante du conditionnement de ces derniers, les écarts dans les temps CPU peuvent donc être attribués au ralentissement de la convergence du solveur linéaire pour les maillages anisotropes.



	Nb éléments	Nb noeuds	Temps CPU [s]
Mailleur à plan moyen	420	1350	1216
Mailleur anisotrope	543	1973	3616
Ecart relatif	+29%	+46%	+197%

Figure 4.6 : Comparaison entre les temps de calcul pour un maillage anisotrope et un maillage à plan moyen.

Ce point nous a semblé une limitation du mailleur anisotrope en particulier si on souhaite simuler des cas avec maillages conséquents, c'est pourquoi on a opté pour un mailleur structuré.

Toutefois, soulignons que le mailleur à plan moyen est astreint à générer le même nombre d'éléments dans l'épaisseur sur toute la surface de la tôle (généralement on considère 2 éléments), or dans certains cas lorsque la géométrie de la pièce présente des zones avec de très faibles rayons de courbure, il peut s'avérer nécessaire d'avoir plus de deux éléments pour bien analyser l'état de contrainte dans l'épaisseur. Dans ces conditions, le mailleur à plan moyen n'offre pas la flexibilité du mailleur anisotrope qui permet un contrôle local du nombre de nœuds dans l'épaisseur.

Dans cette étude, nous avons effectué le portage du mailleur à plan moyen d'une ancienne version de Forge3® vers une nouvelle en apportant quelques modifications. On présente dans le paragraphe suivant le principe de fonctionnement de ce mailleur ainsi que les modifications apportées.

### 4.7.3. Etude du mailleur à plan moyen

#### 4.7.3.1. Principe

L'idée principale du mailleur consiste à ramener le problème de génération d'un maillage volumique 3D à un problème 2D et demi. Ainsi, un plan médian de la tôle est défini au moment de la génération du maillage initial. Cette surface est maillée grâce à un mailleur topologique de surface gauche développé et utilisé dans le code de calcul membranaire TFORM®. Chaque nœud du maillage de la surface est ensuite extrudé suivant la normale nodale. La distance d'extrusion est égale à l'épaisseur (définie au nœud) divisée par le nombre d'éléments dans l'épaisseur. A la suite de cette opération, des prismes sont générés. La division de chacun des prismes en trois tétraèdres conduit à la génération d'un maillage volumique (Figure 4.7).

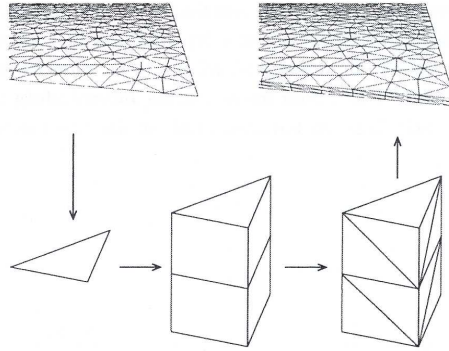


Figure 4.7: Principe du mailleur à plan moyen (MPM).

Si maintenant au cours de la simulation il y a eu lieu de remailler la tôle, dans ce cas il suffit d'extraire la surface moyenne (ceci est rendu possible grâce à une numérotation en couche du maillage volumique) pour la remailler selon les critères de remaillage qu'on explicitera dans le paragraphe suivant. Après remaillage, la nouvelle surface moyenne est de nouveau extrudée suivant la normale nodale calculée comme la moyenne pondérée des normales aux faces attenantes à ce nœud. Reste alors à définir la distance d'extrusion. Pour ce faire, l'épaisseur nodale du nouveau maillage surfacique est déduite de l'épaisseur nodale de l'ancien maillage (avant remaillage) grâce à une opération de transport (cf. 4.7.3.3).

#### 4.7.3.2. Procédure de remaillage

Le remaillage de la surface moyenne utilise le mailleur développé au CEMEF pour le code de calcul par éléments finis membranaire TFORM®. Une description de la technique de remaillage par amélioration topologique, sur laquelle repose le mailleur, est détaillée dans [Rodriguez-Villa, 1998]. Disposant de cet outil, la communication entre Forge3® et le mailleur se fait par la définition d'une carte de taille de maille que le mailleur utilise pour générer le nouveau maillage surfacique. Pour pouvoir établir une carte de taille, il faut au préalable définir les critères nécessaires pour évaluer un maillage donné et décider de l'opération de remaillage d'une part, et ensuite établir une carte de taille qui permettrait de satisfaire les dits critères. Dans la suite on présente les critères de remaillage implémentés dans Forge3®, et on discute de la relation entre ces critères et la définition de la carte de taille de maille.

On commence d'abord par construire la carte de taille de maille nodale du maillage initial. Pour un nœud du maillage, la taille est calculée comme étant la moyenne pondérée des tailles des éléments attenants à ce nœud :

$$L_{noe} = \frac{\sum_{i=1}^{nelt} L_{elt}^i \cdot S_{elt}^i}{\sum_{i=1}^{nelt} S_{elt}^i} \quad (4.71)$$

Où  $nelt$  représente le nombre d'éléments attenants au nœud,  $S_{elt}^i$  est la surface de l'élément  $i$  et  $L_{elt}^i$  sa taille. La taille d'un élément triangulaire peut être définie de plus d'une façon, la définition utilisée par le mailleur est la suivante :

$$L_{elt} = \sqrt{\frac{4S_{elt}}{\sqrt{3}}} \quad (4.72)$$

Cette formule donne la taille exacte d'un triangle équilatéral équivalent de même surface.

#### **a. Critère de remaillage**

Il existe plusieurs critères conduisant au déclenchement d'une opération de remaillage :

- Qualité des triangles
- Rayon de courbure de la surface
- Proximité de zone critique des outillages

#### **Critère de qualité**

La qualité d'un élément triangulaire peut être définie relativement à un élément présentant la meilleure qualité, soit dans le cas 2D un triangle équilatéral. On peut, par exemple, définir le rapport de la surface du triangle par le carré de son périmètre ( $P$ ) comme critère de qualité :

$$Q_{elt} = f \frac{S_{elt}}{P^2} \quad (4.73)$$

Pour normaliser ce critère à 1 lorsque le triangle présente la meilleure qualité, le coefficient  $f$  est égal à  $f = 12\sqrt{3}$ . Lorsque l'élément est dégénéré, la qualité tend vers 0.

L'utilisateur peut définir une qualité seuil minimale en dessous de laquelle une opération de remaillage est déclenchée pour améliorer la qualité du maillage et sans pour autant changer la taille du maillage.

#### **Critère sur le rayon de courbure**

Dans les zones où la courbure commence à croître, il est nécessaire de raffiner le maillage afin d'avoir une description discrète la plus proche possible de la courbure réelle. Pour évaluer quantitativement la notion de courbure sur un maillage triangulaire, on introduit au niveau de chaque nœud du maillage l'angle  $\alpha$ . Cet angle est défini comme le plus grand angle entre deux faces attenantes au nœud.

L'utilisateur peut définir un angle seuil au-delà duquel un remaillage est déclenché. La taille de maille au niveau du nœud en question est alors réduite d'un facteur multiplicateur  $Fact_{cour}$  défini également par l'utilisateur. Pour éviter une réduction continue de la taille de maille, une taille limite inférieure est alors définie. Lorsque le critère de courbure est atteint, la taille de maille s'écrit :

$$L_{noet}^{cour} = \max(Fact_{cour} \cdot L_{noe}, L_{min}^{cour}) \quad (4.74)$$

#### **Proximité de zone critique de l'outillage**

Un autre critère de déclenchement de remaillage peut être défini non plus en fonction de la géométrie de la pièce, mais plutôt en fonction de la géométrie de l'outillage. En effet, au début de la simulation, le maillage de l'outillage peut être analysé afin d'identifier les zones critiques. Les dites zones correspondent aux nœuds de l'outillage où la courbure est supérieure à une valeur seuil.

Au cours de la simulation, lorsque le maillage de la tôle s'approche d'une zone critique de l'outillage, on impose alors un raffinement de celle-ci selon un facteur de réduction  $Fact_{prox}$ .

$$L_{noe}^{cour} = \max(Fact_{prox} \cdot L_{noe}, L_{min}^{prox}) \quad (4.75)$$

On définit  $L_{prox}^{min}$  comme la taille minimale pour limiter la réduction excessive de la taille de maille. D'autres critères basés sur une estimation de l'erreur de calcul de l'épaisseur permettent aussi de définir une taille de maille.

Une fois tous ces critères évalués, la nouvelle taille nodale, appelée taille de maille objective peut être calculée comme suit :

$$L_{noe}^{remail} = \min(L_{noe}^{prox}, L_{noe}^{cour}, \dots) \quad (4.76)$$

### b. Calcul de la carte de taille de maille

Une fois la taille de maille nodale définie, l'opération de remaillage est effectuée lorsque le critère suivant est satisfait :

$$si L_{elt} > L_{elt}^{min} \Rightarrow remaillage \quad (4.77)$$

Si la taille de l'élément peut être aisément calculée selon (4.71), on définit la nouvelle taille  $L_{elt}^{min}$  calculée à partir des tailles nodales comme :

$$L_{elt}^{min} = \frac{1}{3}(L_{noe1}^{min} + L_{noe2}^{min} + L_{noe3}^{min}) \quad (4.78)$$

Or la longueur

$$L_{noei}^{min} = \min_{j=1}^{n_i}(L_{elt}^j) \quad i = \{1,2,3\} \quad (4.79)$$

$n_i$  est le nombre d'éléments attenants au nœud ( $noei$ ). La Figure 4.8 illustre les différentes définitions de maille que l'on a introduites.

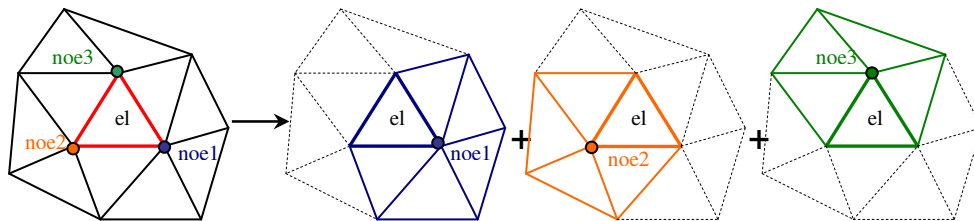


Figure 4.8 : Définition de la taille de maille : par élément et par nœud.

En utilisant l'algorithme de remaillage tel qu'on vient de le décrire, on s'est aperçu que le mailleur était en mesure de respecter globalement les critères de remaillage. Cependant, l'expérience a montré que le mailleur génère des maillages de plus en plus raffinés conduisant à un problème de taille assez conséquente. En regardant de près, on s'est rendu compte que la condition (4.77) était très souvent vérifiée même lorsque une zone vient d'être remaillée. Pour pallier à cette limitation, il a fallu



modifier l'algorithme pour que ce critère ne soit pas vérifié une deuxième fois lorsqu'une zone vient d'être remaillée. Pour ce faire, on a reconsidéré la définition de la taille d'un élément comme :

$$L_{elt} = \max_{i=1..3}(A_i) \quad (4.80)$$

Selon cette définition la taille d'un élément triangulaire correspond à la longueur de sa plus grande arête  $A_i$ . En outre, nous avons considéré une autre définition de la taille de maille nodale minimale :

$$L_{noei}^{\min} = \max_{j=1}^{n_i}(L_{elt}^j) \quad i = \{1,2,3\} \quad (4.81)$$

Les apports de ces modifications seront évalués pour un cas test d'emboutissage d'un pied milieu avec une géométrie assez complexe et dont les résultats seront présentés dans §4.7.4 .

#### 4.7.3.3. Le transport

Connaissant le champ d'une variable nodale définie sur un maillage initial, on cherche à calculer le champ de cette même variable sur un nouveau maillage généré après remaillage. Pour ce faire considérons un nœud  $n$  du nouveau maillage. Projeté sur l'ancien maillage, on peut identifier l'élément  $e$  de l'ancien maillage qui contient  $n$ . La valeur du champ nodal recherché, noté par  $f(n)$ , est déterminée par interpolation directe des valeurs nodales aux sommets de l'élément (Figure 4.8):

$$f(n) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) f(n_i) \quad (4.82)$$

$N_i$  correspondent aux fonctions d'interpolations définies par les équations (4.16).  $(\xi, \eta, \zeta)$  sont les coordonnées locales du nœud  $n$  dans l'élément  $e$ . Comme on dispose de la transformation entre l'élément  $e$  et son élément de référence, les coordonnées  $(\xi, \eta, \zeta)$  sont aisément calculées à partir des coordonnées globales  $(x, y, z)$  de  $n$ .

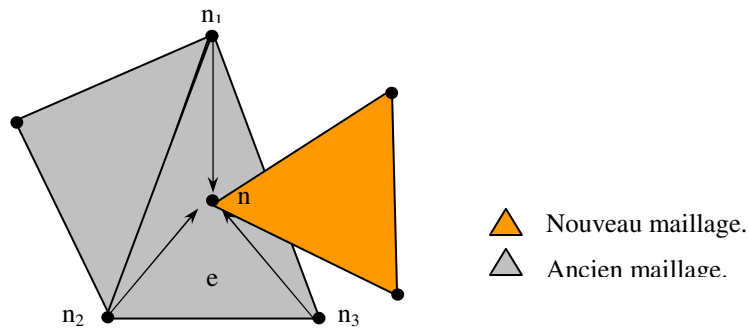


Figure 4.8 : Transport d'une variable nodale par interpolation directe.

L'opération de transport présentée est effectuée pour des champs nodaux. Pour des champs définis aux points d'intégrations (champ de déformation, contrainte,...), un lissage nodale par la méthode des moindres carrés est nécessaire pour extrapoler le champ à transporter des points de Gauss vers les nœuds de l'élément. Ainsi, disposant d'un champ nodal, la procédure de transport nodale peut être appliquée [Rappaz et al, 1998].

#### 4.7.4. Exemple : emboutissage d'un pied milieu

Afin d'évaluer les performances du mailleur, on a effectué la simulation d'emboutissage d'un pied milieu où une tôle initiale est déformée sous l'action d'un poinçon contre une matrice. Pour maintenir la tôle, un serre flan est également utilisé (Figure 4.10-a).

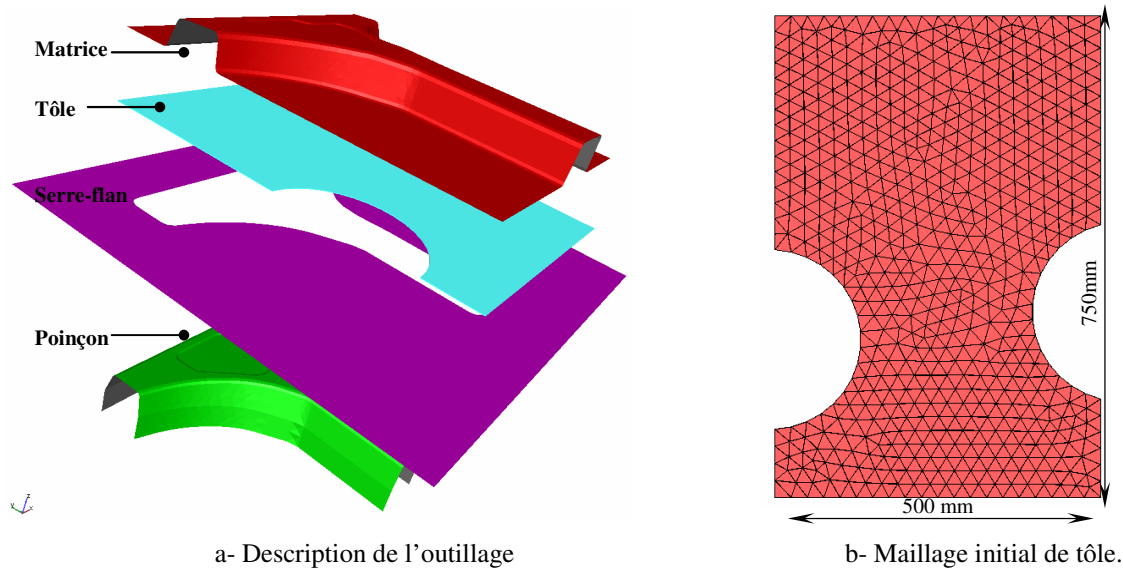


Figure 4.9 : Simulation d'un test d'emboutissage profond (2 éléments dans l'épaisseur).

En partant du maillage initial (Figure 4.10-b), on a simulé l'emboutissage de la tôle avec un comportement élasto-plastique. Pour ces simulations, on a choisi d'évaluer un seul critère de remaillage, en l'occurrence le critère de proximité, étant donné que les outillages présentent plusieurs rayons de congé. La distance d'évaluation est de 10mm et le facteur de réduction est de  $1/2$ , l'angle critique pour l'identification des zones critiques de l'outillage est de  $15^\circ$ , la taille d'élément minimale est de 5mm. On appellera maillage 1 le maillage généré en utilisant les critères (4.71) et (4.79), et maillage 2 le maillage généré avec les nouveaux critères (4.80), (4.81). Sur la Figure 4.10 on peut voir qu'aussi bien pour le maillage 1 que pour le maillage 2, le raffinement est bien localisé au voisinage des rayons de congé du poinçon et de la matrice montrant ainsi une conformité au critère de remaillage de proximité. A noter aussi que l'empreinte située en haut du poinçon est très bien captée par le mailleur. La Figure 4.12 illustre l'évolution du maillage au cours de la déformation.

Par ailleurs, si on observe l'évolution de la taille du maillage au cours de la simulation, on note sur la Figure 4.11 une croissance continue de la taille du maillage (nombre de nœuds et nombre d'éléments). A partir de l'incrément 80 l'accroissement atteint un état relativement stationnaire pour les deux maillages sauf que pour le maillage1, une augmentation significative prend lieu à l'incrément 160. Sur l'ensemble de la simulation, le maillage1 présente une taille supérieure de 60% (en moyenne) à celle du maillage 2 ce qui conduit à un temps de calcul (CPU) largement plus significatif pour le maillage 1.

D'autre part, la distribution des déformations dans l'épaisseur reportée sur la Figure 4.13 montre très peu d'écart entre les deux maillages. Il apparaît donc qu'une utilisation des critères (4.80), (4.81) conduirait à des maillages qui répondent au critère de remaillage tout en évitant un accroissement trop important de la taille du problème et tout en garantissant en même temps, une finesse de maillage suffisante pour bien modéliser le problème.

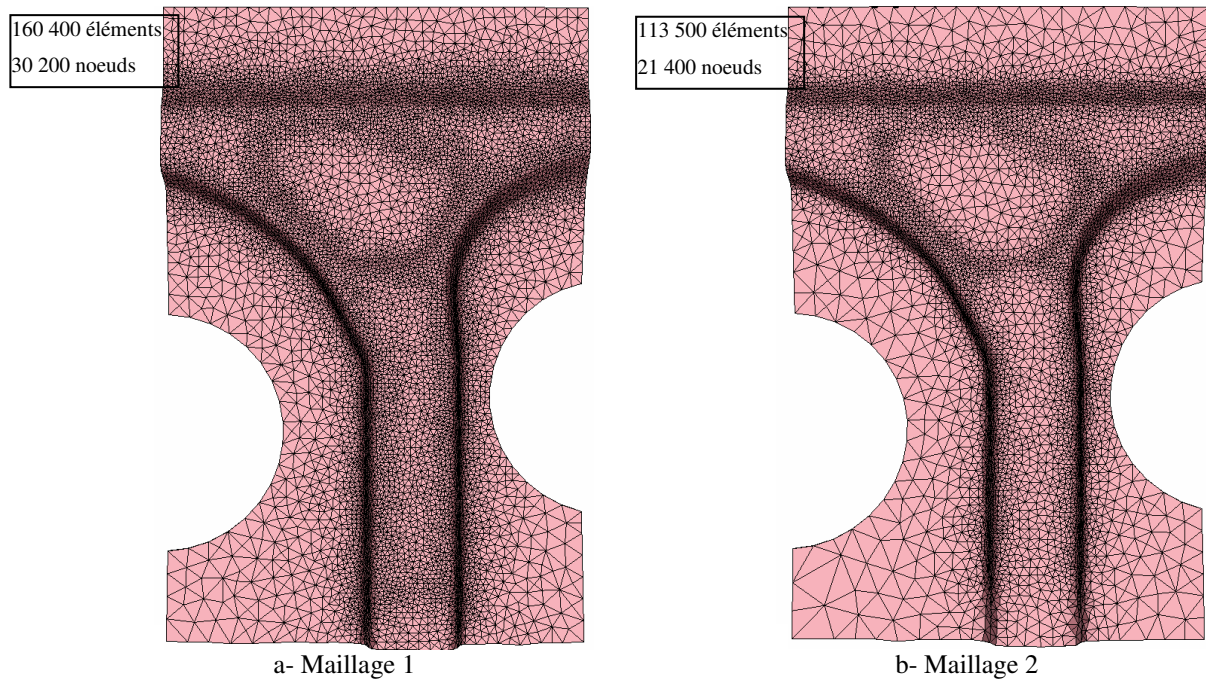


Figure 4.10 : Maillages à une profondeur d'emboutissage de 26mm, générés après 8 remaillages.

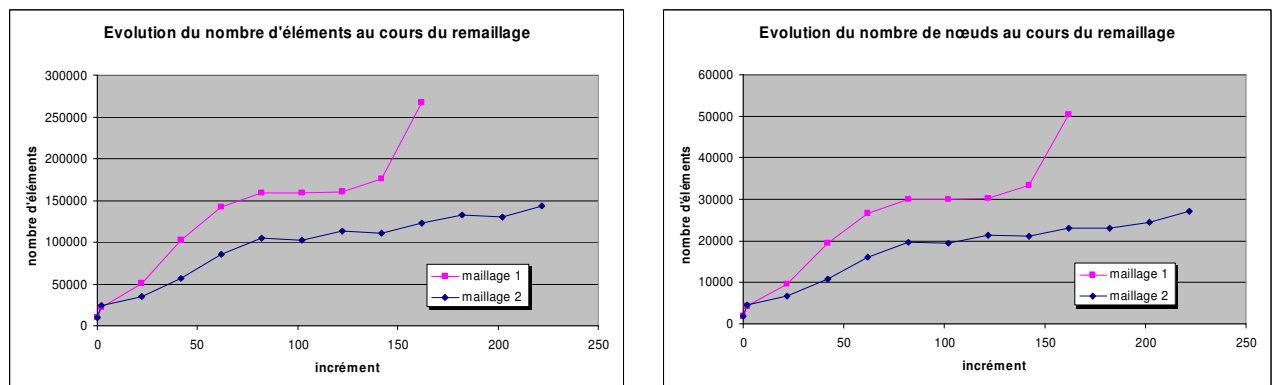


Figure 4.11 : Evolution de la taille du maillage pour les deux critères de remaillage.

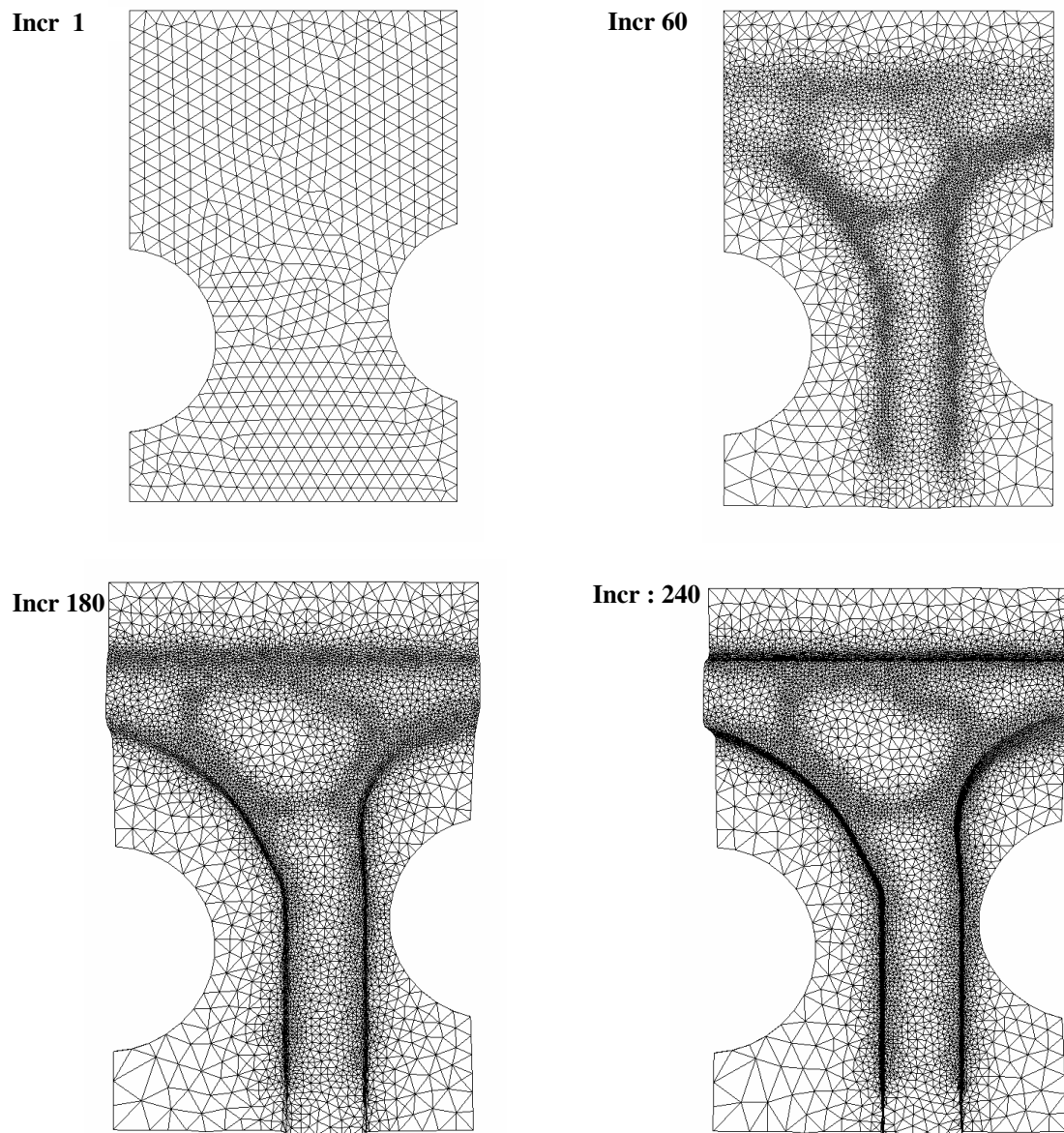


Figure 4.12 : Evolution du maillage au cours de la déformation .

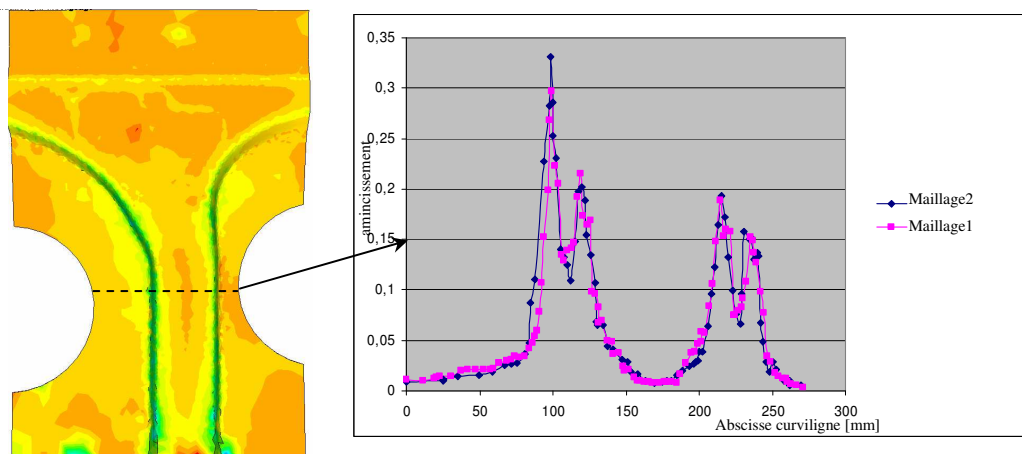


Figure 4.13 : Comparaison de la distribution des amincissements pour les deux maillages.

## **4.8. Conclusion**

Nous avons consacré ce chapitre à la présentation du logiciel de calcul par éléments finis Forge3®. Ce logiciel a été développé pour la simulation des procédés de mise en forme de pièces généralement massives. C'est un code de calcul qui repose sur une formulation en écoulement implicite en vitesse pression et qui utilise l'élément compatible linéaire P1+/P1 pour l'interpolation respective des champs de vitesse et de pression. Les grandes déformations sont prises en compte grâce à une formulation lagrangienne actualisée. En outre, le code dispose d'un remaillieur permettant d'assurer une bonne qualité du maillage lorsque le procédé met en œuvre des déformations assez conséquentes et que les éléments deviennent trop dégénérés. Par ailleurs, le contact est géré par un algorithme de pénalisation explicite qui contraint les nœuds du maillage de toutes pénétrations dans l'outillage.

Le critère de plasticité Hill48 intégré par une méthode de retour radial permet une modélisation précise du comportement des tôles. La rotation plastique, nécessaire pour l'intégration du critère, est calculée en considérant la matrice de rotation issue de la décomposition polaire du tenseur gradient de la transformation.

Concernant la génération du maillage volumique pour les pièces minces, une technique reposant sur l'extrusion d'une surface moyenne initialement maillée en triangle a été utilisée. Nous avons proposé une amélioration des paramètres de gestion du remaillage pour éviter l'accroissement excessif de la taille du maillage.



## Références

Aliaga, C. (2000), *Simulation par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'acier : application à la trempe de pièces forgées ou coulées*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Bellet, M.; Chenot. J.L.; Fourment, L.; Massoni, E. ; Montmitonnet, P. (1994), *Séminaire de plasticité*, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Boyère, E. (1999), *Contribution à la modélisation numérique thermo-mécanique tridimensionnelle du forgeage*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Coupez, T. (1991), *Grandes transformations et remaillage automatique*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

de Borst, R.; Feenstra. P.H. (1990), *Studies in anisotropic plasticity with reference to the Hill criterion*. Int. J. Numer. Method. Eng., vol.29, pp 315-336 (1990).

Gay, C. (1995), *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Gruau, C. (2004), *Génération de métriques pour adaptation anisotrope de maillages, applications à la mise en forme des matériaux*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Knockaert, R. (2001), *Etude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Mocellin, K. (1999), *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud : Etude du contact et calcul multigrille*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Novel, S. (1998), *Etude de l'adaptation de Forge3 aux produits minces*. Rapport technique, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Rappaz, M. ; Bellet. M. ; Deville. M. (1998), *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*. Traité des matériaux 10, première édition, Presses polytechnique et universitaires romandes.

Rodriguez-Villa, A. (1997), *Etude théorique et expérimentale de l'extrusion-soufflage de corps creux en polymère*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Simo, J.C.; Taylor, R. L. (1985), *Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. vol.48, pp 101-118 (1985).



# Chapitre 5

## Simulation numérique du procédé d'hydroformage

<b>Chapitre 5.....</b>	<b>- 177 -</b>
5.1. Introduction.....	- 178 -
5.2. Résolution du problème d'équilibre :cas de l'hydroformage.....	- 178 -
5.3. Intégration implicite.....	- 179 -
5.4. Méthodes de continuation .....	- 185 -
5.4.1. Introduction .....	- 185 -
5.4.2. Principe de la méthode pour une formulation en déplacement.....	- 187 -
5.4.3. Les différentes méthodes de continuation .....	- 190 -
5.4.3.1. Méthode de contrôle de déplacement .....	- 190 -
5.4.3.2. Méthode de la longueur d'arc sphérique.....	- 191 -
5.4.3.3. Méthode de la longueur d'arc cylindrique.....	- 192 -
5.4.3.4. Méthode de la longueur d'arc linéarisée.....	- 192 -
5.4.4. Développement de méthodes de continuation pour une formulation vitesse-pressure (Forge3) .....	- 194 -
5.4.4.1. Adaptation et notations .....	- 194 -
5.4.4.2. Formulation détaillée .....	- 196 -
5.4.4.3. Mise en œuvre de la méthode .....	- 200 -
5.4.4.4. Validation de la méthode.....	- 205 -
5.4.4.5. Effet de la longueur d'arc .....	- 207 -
5.4.4.6. Evaluation de la convergence au sens des éléments finis .....	- 208 -
5.4.4.7. Comparaison des trois méthodes de continuation.....	- 210 -
Références.....	- 213 -



## 5.1. Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons présenté la résolution, dans le code de calcul Forge3®, du problème mécanique. Dans ce chapitre, on s'intéressera plus particulièrement à la simulation de la mise en forme par hydroformage. En première partie, on abordera le problème de la condition aux limites en pression et son intégration temporelle par la méthode de contrôle d'effort. Cette dernière s'est avérée inadaptée pour simuler certains essais présentant un point limite (diminution de la pression en fonction de la déformation). C'est pourquoi, nous introduirons en deuxième partie de ce chapitre, d'autres méthodes (dites méthodes de continuation) pour palier à cette limitation.

## 5.2. Résolution du problème d'équilibre : cas de l'hydroformage

Le procédé d'hydroformage est un procédé caractérisé avant tout par des sollicitations de type pression. Nous commençons par rappeler ici le système linéaire élémentaire relatif à la résolution du problème mécanique:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{vv} & \mathbf{K}_e^{vp} \\ {}^T \mathbf{K}_e^{vp} & \mathbf{K}_e^{pp} - \mathbf{C}_e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{v}_e \\ \delta p_e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_e^{vv} + \mathbf{R}_e^{vp} \\ \mathbf{R}_e^{pv} + \mathbf{R}_e^{pp} - {}^T \mathbf{K}_e^{bp} (\mathbf{K}_e^{bb})^{-1} \mathbf{R}_e^b \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Dans cette expression, la condition aux limites en pression est intégrée au niveau des termes  $\mathbf{R}_e^{vv}$  et  $\mathbf{R}_e^{bb}$  (4.41). Etant donnée que la fonction bulle est nulle sur la surface des éléments, le terme  $\mathbf{R}_e^{bb}$  est également nul.

Le vecteur résidu  $\mathbf{R}_e^{vv}$  peut être décomposé comme la somme des efforts intérieurs  $\mathbf{F}_e^{\text{int}}$ , et des efforts extérieurs de pression  $\mathbf{F}_e^{\text{ext}}$  :

$$\mathbf{R}_e^{vv} = \mathbf{F}_e^{\text{int}} - \mathbf{F}_e^{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{F}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}^l : \mathbf{B}^l dV_e \\ \mathbf{F}_e^{\text{ext}} = \int_{\partial\Omega_e} {}^T \mathbf{N} \cdot (p \cdot \mathbf{n}) ds_e \end{cases} \quad (5.2)$$

Où  $\mathbf{N}$  correspond à la matrice des fonctions de forme définie par :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Le frottement, un effort imposé ou une pression imposée sont autant d'efforts extérieurs. L'équation (5.2) de l'effort extérieur est limitée à la condition de pression imposée objet d'étude de ce paragraphe.

La particularité de cette condition réside dans le fait que l'effort est décrit à la fois par un scalaire  $p$  définissant l'intensité de l'effort, et par un vecteur normal  $\mathbf{n}$  définissant la direction d'application de cet effort sur la face  $\partial\Omega_e$ .

L'accroissement de cet effort extérieur s'écrit par différentiation de l'équation (5.2) comme :

$$\Delta \mathbf{F}_e^{\text{ext}} = \int_{\partial\Omega_e} {}^T \mathbf{N} \cdot \Delta(p \cdot \mathbf{n}) ds_e = \Delta p \int_{\partial\Omega_e} {}^T \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} ds_e + p \int_{\partial\Omega_e} {}^T \mathbf{N} \cdot \Delta \mathbf{n} ds_e = {}^1 \Delta \mathbf{F}_e^{\text{ext}} + {}^2 \Delta \mathbf{F}_e^{\text{ext}} \quad (5.4)$$

On voit apparaître la contribution de deux termes : un premier lié à l'accroissement de l'intensité de la pression (noté  ${}^1\Delta\mathbf{F}_e^{ext}$ ), et un deuxième lié au changement de la direction d'application de l'effort (noté  ${}^2\Delta\mathbf{F}_e^{ext}$ ). Par ailleurs, il est à noter qu'au cours d'un incrément, la surface élémentaire de l'élément  $\partial\Omega_e$  évolue également. Afin d'alléger l'équation précédente, le terme associé à la variation de la surface est délibérément omis, on le reprendra plus loin dans ce paragraphe.

Dans la formulation actuelle de Forge3®, seule la contribution  ${}^1\Delta\mathbf{F}_e^{ext}$  est prise en compte. En effet, à l'instant  $t$  l'équilibre est supposé satisfait sur la configuration  $\Omega_t$ . A l'incrément suivant ( $t + \Delta t$ ) l'équilibre est perturbé en incrémentant l'intensité de la pression extérieure de  $\Delta p$ , ensuite le problème d'équilibre est résolu par la méthode de Newton-Raphson. Cette approche, qu'on appellera explicite, suppose que la normale reste constante durant tout l'incrément. Ceci revient donc à négliger la contribution du deuxième terme  ${}^2\Delta\mathbf{F}_e^{ext}$  (également la variation de la surface).

Cette hypothèse reste réaliste si la variation de la normale au cours d'un incrément est suffisamment faible, ce qui suppose a priori de faibles pas de temps. Afin de vérifier cette hypothèse, reprenons l'exemple représentatif du procédé d'hydroformage (l'essai de gonflage circulaire). Pour ce test, on reporte dans le Tableau 5.1 l'effet du pas de temps sur la simulation. Le pas de temps est contrôlé indirectement via la déformation moyenne imposée par incrément. On note que pour des pas suffisamment faibles, le champ de vitesse est régulier dans le temps. Cependant, en dépassant la valeur de 0.1%, des oscillations numériques au niveau du champ de vitesse commencent à apparaître jusqu'à atteindre une valeur critique qui conduit à la divergence du calcul. Il apparaît donc que pour l'obtention d'une solution lisse dans le temps, on est astreint à utiliser des pas de temps très faibles.

**Tableau 5-1** : Effet du pas de temps sur la simulation d'un essai de gonflage circulaire.

Déformation par incrément	0.01%	0.1%	0.5%	1%	5%
Observations	Pas d'oscillation	oscillations	oscillations	oscillations	divergence

### 5.3. Intégration implicite

Les oscillations numériques soulignées laissent à penser qu'elles sont sous-jacentes à l'hypothèse de condition aux limites en pression explicite. Pour réduire ces oscillations numériques, et sans être contraint d'utiliser des pas de temps excessivement faibles, on propose l'utilisation d'un schéma d'intégration implicite.

#### *Intégration implicite de la condition aux limites en pression*

L'intégration explicite approche la condition aux limites en pression durant un incrément  $\Delta t$  par la normale du début d'incrément (à l'instant  $t$ ). Pour que cette intégration soit implicite, on choisit d'actualiser la normale au cours de l'incrément et ce par l'actualisation du maillage à chaque itération de Newton Raphson :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t} &= \mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t} + \Delta t \cdot \Delta \mathbf{v}_{iter-1}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t} &= \mathbf{x}^t + \Delta t \cdot \mathbf{v}_{iter-1}^{t+\Delta t}\end{aligned}\quad (5.5)$$

L'effort extérieur s'écrit alors :

$$(F_e^{ext})_{iter}^{t+\Delta t} = p \int_{(\partial\Omega_e)_{iter}^{t+\Delta t}}^T \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t}) ds_e \quad (5.6)$$

Sachant qu'il existe une transformation unique entre l'élément courant  $\partial\Omega_e$  et l'élément de référence  $\partial\Omega_0$ , il est possible d'écrire:

$$ds_e = J' ds_0 \quad (5.7)$$

Où  $ds_e$  est la surface élémentaire sur la configuration courante,  $ds_0$  la surface élémentaire d'un élément de référence et  $J'$  est le déterminant de la matrice de transformation. Il en découle que l'effort extérieur s'écrit :

$$(F_e^{ext})_{iter}^{t+\Delta t} = p \int_{\partial\Omega_0}^T \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t}) \cdot J'(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t}) ds_0 \quad (5.8)$$

La normale et le jacobien devenant fonction du champ de vitesse, ils admettent donc une contribution à la matrice de raideur. Cette nouvelle contribution sera notée  $K_e^{\Delta n}$  :

$$K_e^{\Delta n} = -\frac{\partial F_e^{ext}(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{v}_{iter}^{t+\Delta t}} = -p \int_{\partial\Omega_0}^T \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{v}_{iter}^{t+\Delta t}} \cdot J'(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t}) ds_0 - p \int_{\partial\Omega_0}^T \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t}) \cdot \frac{\partial J'(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{v}_{iter}^{t+\Delta t}} \cdot ds_0 \quad (5.9)$$

Elle est intégrée dans la matrice de rigidité locale au niveau de la matrice bloc  $K_e^{vv}$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{vv} + \mathbf{K}_e^{\Delta n} & \mathbf{K}_e^{vp} \\ {}^T \mathbf{K}_e^{vp} & \mathbf{K}_e^{pp} - \mathbf{C}_e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{v}_e \\ \delta \mathbf{p}_e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_e^{vv} + \mathbf{R}_e^{vp} \\ \mathbf{R}_e^{pv} + \mathbf{R}_e^{pp} - {}^T \mathbf{K}_e^{bp} (\mathbf{K}_e^{bb})^{-1} \mathbf{R}_e^b \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Il est à noter que la matrice  $K_e^{\Delta n}$  est non symétrique.

### **Intégration implicite des équations d'équilibre**

Au chapitre précédent, nous avons présenté les équations d'équilibre incrémentales, lesquelles sont résolues par intégration explicite dans la mesure où les intégrales (4.31) et (4.36) sont définies sur la configuration du début d'incrément et le maillage est actualisé en fin d'incrément.

Comme on l'a présenté pour la condition aux limites en pression, l'approche implicite repose sur une actualisation du maillage à chaque itération de Newton Raphson, les intégrales du gradient sont donc définies sur la configuration actualisée.

D'après les définitions données par (4.41 et 4.46), seules les matrices blocs qui définissent les dérivées par rapport au champ de vitesse (i.e.  $K_e^{vv}$  et  $K_e^{pv}$ ) sont à modifier. La nouvelle expression de la matrice de raideur s'écrit alors:

$$\bullet K_{e\ nklm}^{vv} = \frac{\partial R_{e\ nk}^{vv}}{\partial v_{lm}^l} + \frac{\partial R_{e\ nk}^{vp}}{\partial v_{lm}^l}$$

$$\frac{\partial R_{e\ nk}^{vv}}{\partial v_{lm}^l} = \int_{\Omega_0} B_{jikn}^l C_{ijpq}^l B_{pqlm}^l J(x_{iter}^{t+\Delta t}) dv_0 + \int_{\Omega_0} s_{ij}^{t+\Delta t} \frac{\partial B_{ijkn}}{\partial v_{lm}^l} J(x_{iter}^{t+\Delta t}) dv_0 + \int_{\Omega_0} s_{ij}^{t+\Delta t} B_{ijkn}^l \frac{\partial J(x_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial v_{lm}^l} dv_0 \quad (5.11-a)$$

$$\frac{\partial R_{e\ nk}^{vp}}{\partial v_{lm}^l} = - \int_{\Omega_0'} p_i^{t+\Delta t} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial v_{lm}^l} \left( \frac{\partial N_n(x_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial x_k} \right) \right] J(x_{iter}^{t+\Delta t}) dv_0 - \int_{\Omega_0'} p_m^{t+\Delta t} N_m \frac{\partial N_n(x_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial x_k} \frac{\partial J(x_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial v_{lm}^l} dv_0$$

$$\bullet K_{e\ klm}^{pv} = \frac{\partial R_{e\ k}^{pv}}{\partial v_{lm}^l} + \frac{\partial R_{e\ k}^{pp}}{\partial v_{lm}^l}$$

$$\frac{\partial R_{e\ k}^{pv}}{\partial v_{lm}^l} = - \int_{\Omega_0} N_k \frac{\partial N_m}{\partial x_l} J(x_{iter}^{t+\Delta t}) dv_0 - \int_{\Omega_0} N_k \left[ \frac{\partial N_n}{\partial x_j} v_{jn}^{t+\Delta t} + \frac{\partial N_b}{\partial x_j} b_j^{t+\Delta t} \right] \frac{\partial J(x_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial v_{lm}^l} dv_0$$

$$- \int_{\Omega_0} N_k \left[ \frac{\partial}{\partial v_{lm}^l} \left( \frac{\partial N_n(x_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial x_j} \right) v_{jn}^{t+\Delta t} \right] J(x_{iter}^{t+\Delta t}) dv_0 \quad (5.11-b)$$

$$\frac{\partial R_{e\ k}^{pp}}{\partial v_{lm}^l} = - \int_{\Omega_0} N_k N_n \frac{p_n^{t+\Delta t} - p_n^0}{\chi} \frac{\partial J(x_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial v_{lm}^l} dv_0$$

Notons que la dérivée du terme surfacique de pression est prise en compte par la matrice  $K_e^{\Delta n}$  qui vient se rajouter à la matrice  $K_e^{vv}$  (5.11a). Finalement, l'intégration implicite nécessite donc le calcul des dérivées supplémentaires  $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{V}}, \frac{\partial J'}{\partial \mathbf{V}}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{V}}, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{V}}$ .

Le calcul de ces différentes dérivées est analogue. Nous nous contenterons donc d'explicitier uniquement la dérivée de la normale. Pour ce faire, on exprime la normale  $\mathbf{n}_{iter}^{t+\Delta t}$  en fonction de la normale à l'itération  $iter - 1$ , par un développement limité de premier ordre :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t}) &= \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}) + \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}} \cdot \Delta \mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t} + O(\Delta \mathbf{x}^2) \\ &= \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}) + \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}} \cdot \Delta \mathbf{v}_{iter-1}^{t+\Delta t} \cdot \Delta t + O(\Delta \mathbf{x}^2) \\ &= \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}) + \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}} \cdot (\mathbf{v}_{iter}^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_{iter-1}^{t+\Delta t}) \cdot \Delta t + O(\Delta \mathbf{x}^2) \end{aligned} \quad (5.12)$$

En vertu du développement de l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{v}_{iter}^{t+\Delta t}} = \left. \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}} . \Delta t \quad (5.13)$$

En suivant le même développement limité que l'équation (5.13), les autres dérivées sont définies par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J'(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{v}_{iter}^{t+\Delta t}} &= \left. \frac{dJ'}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}} . \Delta t \\ \frac{\partial J(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{v}_{iter}^{t+\Delta t}} &= \left. \frac{dJ}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}} . \Delta t \\ \frac{\partial B(\mathbf{x}_{iter}^{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{v}_{iter}^{t+\Delta t}} &= \left. \frac{dB}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{iter-1}^{t+\Delta t}} . \Delta t \end{aligned} \quad (5.14)$$

A présent, le problème se ramène au calcul des termes suivants :  $dn/d\mathbf{x}$ ,  $dJ'/d\mathbf{x}$ ,  $dJ/d\mathbf{x}$ ,  $dB/d\mathbf{x}$ .

Deux façons de procéder sont offertes pour le calcul de ces dérivées ; soit par dérivation analytique, soit par dérivation numérique. Les dérivées analytiques ont pu être développées et implémentées. Toutefois, leur validation nécessite plus d'investigations. Faute de temps, on présentera donc les résultats obtenus avec une méthode de dérivation numérique. Cette dernière approche offre l'avantage d'être plus facile et plus rapide à mettre en œuvre.

Toutes les dérivées sont calculées d'une manière analogue. A titre d'exemple, l'équation (5.15) correspond au calcul par différences finies à droite du jacobien surfacique :

$$\frac{\partial n_k}{\partial x_{lm}} = \frac{n_k(x_{11}, \dots, x_{lm} + pert.x_{lm}, \dots, x_{23}) - n_k(x_{11}, \dots, x_{lm}, \dots, x_{23})}{pert.x_{lm}} \quad (5.15)$$

Où  $pert$  représente la perturbation relative de la composante  $l$  ( $1 \leq l \leq 3$ ) du nœud  $m$  ( $1 \leq m \leq 3$ ) appartenant à la face de normale  $\mathbf{n}$ .

Afin de déterminer la valeur de la perturbation à appliquer, on considère le cas de compression d'un quart de cube de dimension 1x1mm et dont le maillage est composé de trois éléments. Une pression est appliquée sur la face supérieure. Pour une hauteur de compression de 0.5mm on compare dans le tableau 5-2 l'influence de la perturbation sur l'écart relatif entre les calculs de la dérivée de la normale numérique (5.15) et analytique (annexe C).

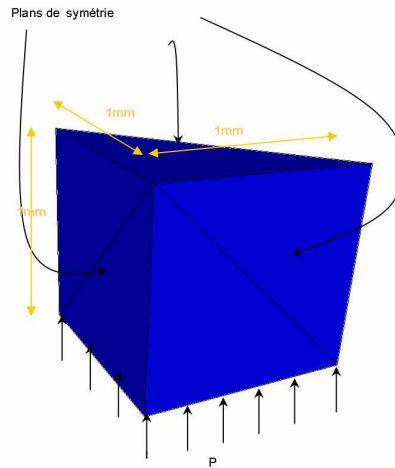


Figure 5.1 : Compression d'un cube.

On note une dépendance de la dérivée numérique à l'amplitude de la perturbation, avec un minimum d'erreur situé à une perturbation  $10^{-8}$ . Par ailleurs, des perturbations de l'ordre de  $10^{-6}$  donnent des résultats satisfaisants.

**Tableau 5-2 :** Influence de la perturbation sur le calcul de la dérivée de la normale

pert	$\max_{lmk} \frac{\left  \frac{dn_k}{dx_{lm}} \right _{analy}}{\left  \frac{dn_k}{dx_{lm}} \right _{DF droite}}$
	$\frac{\left  \frac{dn_k}{dx_{lm}} \right _{analy}}{\left  \frac{dn_k}{dx_{lm}} \right _{DF droite}}$
$10^{-4}$	5.0 e-3%
$10^{-6}$	5.1 e-5%
$10^{-8}$	4.2 e-7%
$10^{-10}$	4.1 e-5%

Les résultats précédents montrent que les dérivations par différences finis évaluent avec une bonne précision les dérivées recherchées.

Comme exemple d'application, on va considérer le cas de gonflage d'un disque circulaire avec une loi de comportement de type Von Mises et une loi d'écrouissage définie par :

$$\bar{\sigma} = 304(0.0067 + \bar{\epsilon})^{0.26} \cdot \dot{\bar{\epsilon}}^{0.01}.$$

- un chemin de pression de 0.5 bars/s
- une épaisseur de 1mm et un rayon de 75mm.
- une taille de maille de 3.5 mm (Figure 5.2).

Le Tableau 5-3 résume les résultats de simulation de l'essai de gonflage pour différents pas de temps. Dans ce tableau, on compare la formulation explicite (formulation initiale de Forge3®) avec les formulations implicites avec dérivées de domaines d'une part et la formulation implicite sans dérivées de domaine.

Ce tableau montre que la diminution du pas de temps améliore la convergence (le nombre d'itération de Newton-Raphson) des trois méthodes. En outre, on note que l'intégration implicite conduit à une

nette amélioration de la conservation du volume de la pièce. D'un autre côté, on remarque que la méthode implicite est moins rapide à converger que la méthode explicite, elle nécessite plus d'itérations.

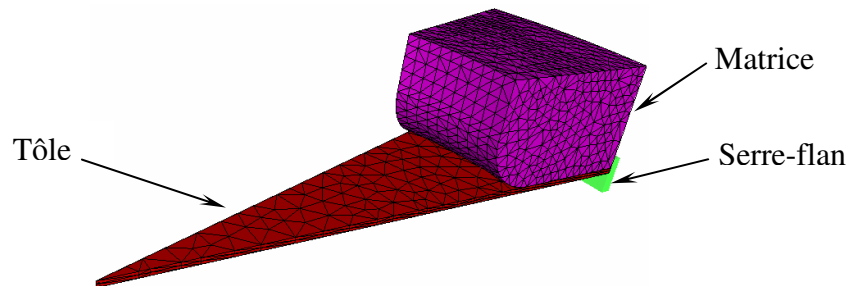


Figure 5.2 : Maillage d'un essai de gonflage circulaire.

Si on examine à présent les deux méthodes implicites, on s'aperçoit que l'approche implicite complète (c.à.d qui tient compte des dérivées de domaine) est légèrement moins rapide à converger qu'une méthode implicite reposant uniquement sur une actualisation itérative du domaine et ne prenant pas en compte les dérivées évoquées. De plus, d'un point de vue conservation de volume, on ne voit pas apparaître de différences majeures entre ces deux approches. Ceci nous conduit donc à conclure que la contribution des termes de dérivée de domaine sont assez faibles devant les autres contributions (rhéologie, incompressibilité,...). C'est pourquoi, il nous semble justifié de négliger ces termes dans la formulation du problème et de conserver une actualisation itérative du maillage. Même si elle est plus coûteuse qu'une actualisation incrémentale, elle permet, toutefois, une meilleure conservation du volume de la pièce mais aussi une élimination des oscillations numériques observées en intégration explicite (Tableau 5.4).

A noter également que le temps de calcul global d'une méthode implicite avec dérivation du domaine dépasse nettement le temps de calcul quand les dérivées ne sont pas prises en compte. Ceci est attribué au ralentissement de la convergence de la méthode de Newton Raphson mais également au temps nécessaire pour l'assemblage des gradients supplémentaires utilisés pour le calcul des dérivées numériques.

#### Remarque

Mocellin [Mocellin, 1999] s'est intéressée à l'implémentation d'une intégration implicite par actualisation itérative de la condition de contact, l'auteur souligne que globalement et bien que la méthode implicite soit plus précise en terme de respect de la condition de non pénétration, elle est nettement moins rapide qu'une intégration explicite. Dans certains cas, les écarts dans les temps de calcul sont considérables. Au vu de ces résultats, nous avons conservé une intégration explicite du contact.

**Tableau 5-3** : Comparaison entre l'intégration explicite et l'intégration implicite.  
(Résultats correspondants à une hauteur de dôme de 20mm).

Pas de temps	dt=0.05s		dt=0.1s		dt=1.s		Dt=5s	
	Nb iter/ CPU	Perte de volume	Nb iter/ CPU	Perte de volume	Nb iter/CPU	Perte de volume	Nb iter/ CPU	Perte de volume
<b>Explicite</b>	2.23/ 11min	0.059%	2.6/ 9min 4s	0.069%	4.44/ 1min 14s	0.18%	Divergence	<b>0.89%</b>
<b>Implicite sans dérivée de domaine</b>	3.71/ 35 min 36s	0.051%	5.11/ 17min 3s	0.044%	9.45 4min 18s	-0.05%	13.8/ 2min 37s	-0.45%
<b>Implicite avec dérivée de domaine</b>	3.48/ 45min 40s	0.058%	4.72/ 36min 12s	0.044%	9.65 6min 32s	-0.05%	13.8/ 3min 28s	-0.45%

**Tableau 5-4** : Effet du pas de temps sur la simulation d'un essai de gonflage circulaire.

Pas de temps	dt=0.05s	dt=0.1s	dt=1.s	dt=5s
<b>Explicite</b>	Pas d'oscillations	oscillation	Oscillations	oscillations
<b>Implicite sans dérivée de domaine</b>	Pas d'oscillations	Pas d'oscillation	Pas d'oscillations	Pas d'oscillations
<b>Implicite avec dérivée de domaine</b>	Pas d'oscillations	Pas d'oscillations	Pas d'oscillations	Pas d'oscillations

## 5.4. Méthodes de continuation

### 5.4.1. Introduction

Comme on a pu le noter, la réponse d'une tôle métallique à une pression est un problème « fortement » non linéaire. Cette non linéarité est à la fois due au comportement élasto-plastique, mais aussi à des non linéarités géométriques qui se manifestent pour certains aciers par l'apparition d'un point limite. En effet, les mesures expérimentales sur des essais de gonflage circulaire de tôles en DC04 ont révélé que la courbe pression-hauteur présentait un pic au-delà duquel la tôle continuait à se déformer avec une pression décroissante (chapitre 2). Le pic de pression est identifié comme un point limite. Par définition, un point limite marque la fin d'un processus de déformation stable où l'effort (pression) augmente avec la déformation, et l'initiation d'un processus instable marqué par la décroissance de l'effort pour une déformation croissante. Les propriétés du matériau et la géométrie de la pièce influent sur l'apparition de cette instabilité. Le potentiel de déformation après l'initiation d'une telle instabilité est non négligeable, il convient donc de l'étudier pour une exploitation optimale de la formabilité du matériau.

Cependant, la simulation numérique d'un tel comportement n'est pas immédiate. Elle présente une difficulté majeure puisqu'en s'approchant du point limite, l'algorithme de Newton-Raphson avec une méthode de contrôle d'effort standard (pression imposée à chaque incrément de temps) s'avère inapplicable pour dépasser ce point et simuler la phase instable.

Il existe dans la littérature d'autres algorithmes développés pour palier aux limites des méthodes de contrôle d'effort. Ces méthodes sont connues sous le nom de méthodes de continuation, et ont été initialement développées pour traiter des problèmes de forte non linéarité géométrique tel le



flambement de voilure ou de poutre [Meek et al, 1998]. Le comportement de telles structures est généralement élastique linéaire, cependant et en raison des instabilités géométriques, leurs courbes de chargement peuvent présenter de très fortes non linéarités (points limites, points de retour arrière,...). Les méthodes de continuation s'avèrent alors un outil indispensable pour suivre au plus près de telles courbes. D'autres travaux ont généralisé l'utilisation des méthodes de continuation pour des problèmes, cette fois ci, à forte non linéarité comportementale (comportement élastoplastique, endommagement...). Ainsi [de Borst, 1987] et [May et al, 1997] ont pu montrer l'utilité de la méthode de la longueur d'arc pour le suivi de la propagation d'une fissure. [Zhou et al, 1994] ont également adapté la méthode de la longueur d'arc pour le suivi du flambement d'un tube élasto-plastique sous pression sollicité en compression latérale et soumis à des effets de torsion.

Avant d'aborder l'étude de ces méthodes, une question peut se poser : pourquoi utiliser une méthode de continuation alors que la branche qu'on cherche à simuler est instable ?

Pour répondre à cette question, Crisfield [Crisfield, 1991] a souligné les points suivants :

- \* Il est intéressant d'étudier la nature du comportement au-delà du maximum d'effort afin d'évaluer la nature de l'effondrement.
- \* Même s'il existe un seul maximum, il est nécessaire de le dépasser, ceci permet de confirmer le passage par un point limite. Pour certains autres auteurs, la divergence d'une méthode de contrôle d'effort est une indication du point limite. Cependant, une telle approche peut s'avérer erronée lorsqu'on sait qu'il peut y avoir plusieurs raisons de divergence.

Notre intérêt pour ces méthodes rejoint les points évoqués par Crisfield en particulier :

- \* En cherchant à appliquer le critère de striction de Force Maximum Modifié [Hora et al, 1996] lors de la simulation des essais de gonflage du DC04, le calcul numérique diverge avant d'atteindre la striction physique.
- \* Nous avons remarqué que la méthode de contrôle d'effort peut diverger à l'approche du point limite et avant le pic d'effort, ce qui réduit encore plus l'exploitation du potentiel de déformation du matériau.
- \* Il peut être intéressant d'exploiter le potentiel de déformation supplémentaire que peut avoir le matériau au-delà du point limite. La Figure 5.3-a illustre la frontière expérimentale entre le régime stable et le début de la déformation instable pour un essai de gonflage circulaire du DC04 1mm. En haut de la figure, la frontière est représentée sur une courbe pression-hauteur. Cette même frontière est définie sur la courbe d'évolution de la pression en fonction de la déformation en épaisseur au pôle (en bas de la même figure), elle rend mieux compte du potentiel de déformation situé dans la zone instable et qu'il peut être utile d'exploiter.
- \* Les deux régimes de déformation se distinguent par la nature de la distribution des déformations. On a représenté sur la Figure 5.3-b le profil des déformations en épaisseur au cours de l'essai de gonflage circulaire. On note que le régime instable se distingue par un gradient de déformation en épaisseur plus marqué qu'en régime stable où la distribution des déformations est plus uniforme.

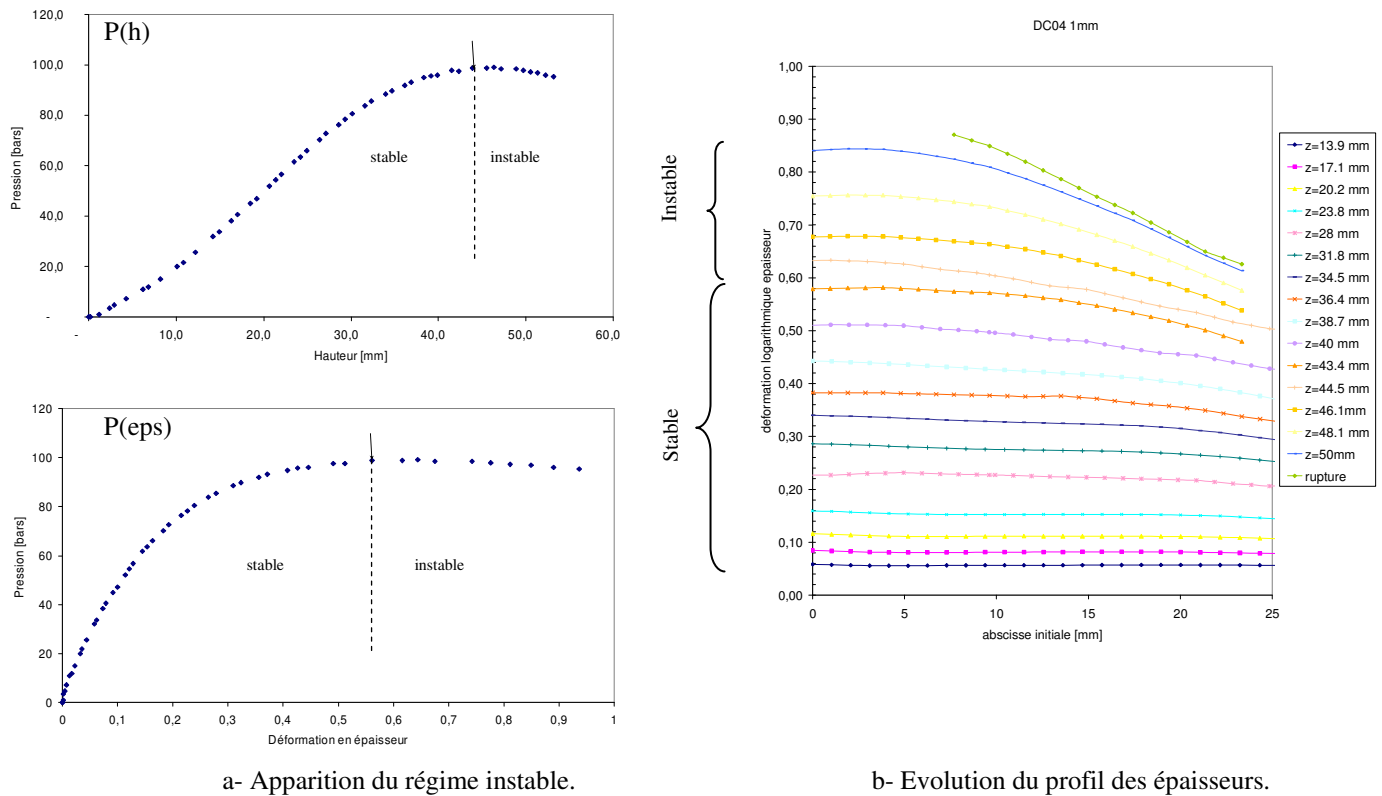


Figure 5.3 : Apparition du régime instable pour un essai de gonflage circulaire d'une tôle de DC04 1mm.

### 5.4.2. Principe de la méthode pour une formulation en déplacement

Dans ce qui suit on présentera les différentes méthodes utilisées pour la résolution du problème d'équilibre: méthode par contrôle d'effort, méthode par contrôle de déplacement, et la méthode de la longueur d'arc.

Dans la littérature ces méthodes sont le plus souvent développées dans le cadre d'une formulation en déplacement. On présentera dans ce paragraphe une revue des ces approches, qu'on adaptera (§3.4) à la formulation vitesse/pression de Forge3®.

La méthode standard de Newton-Raphson appliquée au cas de l'hydroformage consiste à imposer une pression donnée et à résoudre ensuite les équations d'équilibre. Schématiquement, le problème revient à trouver le point d'intersection entre la courbe d'équilibre et la droite horizontale de chargement (Figure 5.4-a). L'intersection est garantie tant que l'effort imposé ne dépasse pas le maximum de la courbe de chargement. Au-delà, aucune intersection n'étant possible, la méthode diverge.

Pour une méthode de contrôle de déplacement, l'approche consiste à imposer le déplacement d'un nœud particulier et résoudre ensuite le problème d'équilibre. Schématiquement, ceci revient à trouver le point d'intersection entre la courbe d'équilibre et la droite de charge verticale (Figure 5.4-b). Même en présence d'un point limite, l'intersection est assurée aussi bien avant qu'après le pic de pression.

Enfin, une autre approche, dite de longueur d'arc, consiste à chercher l'intersection entre la courbe d'équilibre et une courbe de charge dont l'équation est connue à l'avance. Comme illustré sur Figure 5.4-c, la méthode assure la convergence du problème d'équilibre avant et après le point limite.

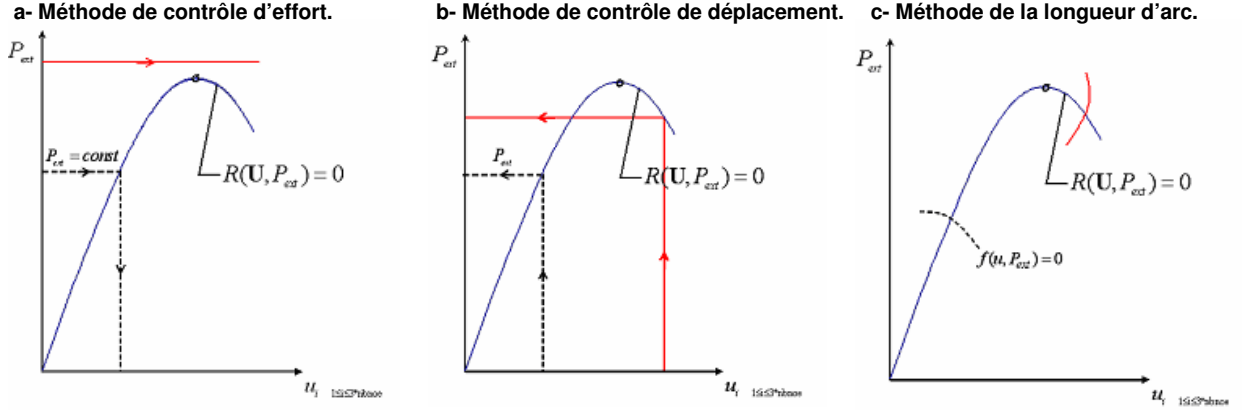


Figure 5.4 : Courbe chargement-déplacement.

Nous rappelons que le problème d'équilibre se ramène à la résolution d'un système d'équations non linéaires en déplacement ( $\mathbf{U}$  vecteur des déplacements nœux) de la forme :

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (5.16)$$

Avec  $\mathbf{F}_{int}$  le vecteur des efforts intérieurs et  $\mathbf{F}_{ext}$  le vecteur des efforts extérieurs. L'équation d'équilibre peut être réécrite en introduisant un facteur scalaire multiplicatif des efforts extérieurs, appelé facteur de chargement  $\lambda$  et défini par :

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) - \lambda \mathbf{f}_{ext} = 0 \quad (5.17)$$

Comme le système d'équations est non linéaire en  $\mathbf{U}$ , sa résolution est basée sur une procédure incrémentale/itérative : le problème est linéarisé par étape et l'erreur de linéarisation est ensuite corrigée par des itérations additionnelles d'équilibre.

Si le principe de la méthode de contrôle d'effort consiste à imposer un niveau de chargement et à chercher l'équilibre, le principe des méthodes de continuation (longueur d'arc et contrôle de déplacement) considère le facteur de chargement  $\lambda$  comme une inconnue supplémentaire du problème. Pour que le problème soit bien posé, une équation scalaire supplémentaire est alors nécessaire. Cette équation, appelée fonction contrainte, définit l'équation d'une courbe  $f(\mathbf{U}, \lambda)$  dont l'intersection avec la courbe charge détermine le point d'équilibre.

Le système initialement de dimension  $n$  (avec  $n$  le nombre de degrés de liberté) est transformé en un problème de dimension  $(n+1)$  défini par:

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) - \lambda \mathbf{f}_{ext} = 0 \\ f(\mathbf{U}, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

Le développement de Taylor en série tronquée à l'ordre 2 du système (5.18) s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{i+1}(\mathbf{U}_{i+1}, \lambda_{i+1}) = \mathbf{R}_i + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_i \cdot \delta \mathbf{U}_i + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \Big|_i \cdot \delta \lambda_i = \mathbf{R}_i(\mathbf{U}, \lambda) + \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{U}_i - \mathbf{f}_{ext} \cdot \delta \lambda_i = 0 \\ f_{i+1}(\mathbf{U}_{i+1}, \lambda_{i+1}) = f_i + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} \Big|_i \cdot \delta \mathbf{U}_i + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_i \cdot \delta \lambda_i = f_i + \mathbf{H}_i^T \cdot \delta \mathbf{U}_i + \alpha_i \cdot \delta \lambda_i = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

avec

$$\mathbf{K}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_i; \quad \mathbf{H}_i^T = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} \Big|_i; \quad \alpha_i = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_i \quad (5.20)$$

Partant des équations (5.19) et (5.20), le problème se ramène à la résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_i & -\mathbf{f}_{ext}^i \\ \mathbf{H}_i^T & \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{U}_i \\ \delta \lambda_i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{int}^i - \lambda_i \mathbf{f}_{ext}^i \\ f_i \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Cette nouvelle matrice de raideur est connue sous le nom de matrice (bordée) « bordered en Anglais » en raison de sa forme particulière où la matrice classique de raideur  $\mathbf{K}_i$  est bordée par une ligne et une colonne supplémentaire. Une étude des propriétés de ces matrices est présentée dans [Riks et al, 1988]. Globalement, la matrice bordée présente à la fois un inconvénient et un avantage :

- \* L'avantage est qu'elle n'est pas singulière lorsque la matrice de raideur l'est au voisinage d'un point limite ou d'un point de bifurcation.
- \* L'inconvénient de cette matrice tient au fait qu'elle n'est pas symétrique d'une part, et qu'elle peut induire une perturbation de la structure en bande issue de la discrétisation par éléments finis.

Riks [Riks, 1979] a utilisé une résolution du système linéaire non symétrique. D'autres auteurs [Crisfield, 1981], [Schweiserhof et al, 1986] ont opté pour la méthode proposée par [Batoz et al, 1979]. Cette méthode consiste à calculer l'incrément de déplacement en deux temps. En effet, en partant d'un état d'équilibre pour lequel le facteur de chargement  $\lambda_i$  et le champ de déplacement  $\mathbf{U}_i$  sont connus, on cherche l'équilibre pour un nouveau facteur de chargement ( $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta \lambda_i$ ). A partir de l'équation (5.19) on obtient :

$$\delta \mathbf{U}_i = -\mathbf{K}_i^{-1} \cdot [\mathbf{R}(\mathbf{U}_i, \lambda_i) - \delta \lambda_i \cdot \mathbf{f}_{ext}] \quad (5.22)$$

Ce problème est équivalent à la résolution des deux équations suivante en  $\delta \mathbf{U}_i^I, \delta \mathbf{U}_i^{II}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i \delta \mathbf{U}_i^I &= \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{K}_i \delta \mathbf{U}_i^{II} &= -\mathbf{R}_i \end{aligned} \quad (5.23)$$

où l'incrément de déplacement total s'écrit :

$$\delta \mathbf{U}_i = \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{U}_i^I + \delta \mathbf{U}_i^{II} \quad (5.24)$$

le facteur de chargement étant défini par :

$$\delta\lambda_i = -\frac{f_i + \mathbf{H}_i^T \delta\mathbf{U}_i''}{\alpha_i + \mathbf{H}_i^T \delta\mathbf{U}_i'} \quad (5.25)$$

L'actualisation du champ de déplacement et du facteur de chargement est donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda_{i+1} &= \lambda_0 + \Delta\lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta\lambda_i \\ \Delta\lambda_{i+1} &= \Delta\lambda_i + \delta\lambda_i \\ \mathbf{U}_{i+1} &= \mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \delta\mathbf{U}_i \\ \Delta\mathbf{U}_{i+1} &= \Delta\mathbf{U}_i + \delta\mathbf{U}_i = \Delta\mathbf{U}_i + \delta\lambda_i \delta\mathbf{U}_i' + \delta\mathbf{U}_i'' \end{aligned} \quad (5.26)$$

$\lambda_0, \mathbf{U}_0$  sont respectivement le facteur de chargement et le champ de déplacement en début d'incrément (état d'équilibre de l'incrément précédent).

#### Remarque

Le vecteur effort extérieur  $f_{ext}$  n'est pas actualisé au cours des itérations, seule l'intensité est changée à travers l'actualisation du facteur de chargement  $\lambda_i$ .

Selon l'expression de la fonction contrainte  $f(\mathbf{U}, \lambda)$ , on retrouve les trois méthodes évoquées :

- Méthode de contrôle de déplacement.
- Méthode de contrôle de l'effort.
- Méthode de la longueur d'arc.

Pour la méthode de contrôle de l'effort, la fonction contrainte s'exprime par :

$$f = \lambda - \Delta l \quad (5.27)$$

Avec  $\Delta l$  constante indiquant le niveau de charge fixé. Le problème se ramène alors à un problème standard de Newton-Raphson:

$$\delta\mathbf{U}_i = -(\mathbf{K}_i)^{-1}(\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}_i) - \Delta l \mathbf{f}_{ext}) \quad (5.28)$$

### **5.4.3. Les différentes méthodes de continuation**

#### 5.4.3.1. Méthode de contrôle de déplacement

Cette méthode a été développée par [Batoz et al, 1979]. Elle repose sur le contrôle du déplacement d'un nœud particulier. La fonction contrainte  $f$  associée est définie par :

$$f(\mathbf{U}, \lambda) = \Delta u_a - \Delta l \quad (5.29)$$

Avec  $\Delta u_a$  la composante du vecteur inconnu contrôlée,  $\Delta l$  est la valeur du déplacement imposé à chaque incrément.

Dans ce cas, l'équation (5.20) conduit à  $\alpha = 0$  et  $\mathbf{H}^T = \mathbf{e}^T$  avec  $\mathbf{e}^T$  vecteur unitaire composé de zéro et prend la valeur 1 pour la composante contrôlée. Le facteur de chargement (5.25) s'exprime alors comme :

$$\delta\lambda_i = \frac{\Delta l - (u_{ai} + \delta u_{ai}^I)}{\delta u_{ai}^I} \quad (5.30)$$

Le champ de déplacement est calculé à partir de l'équation (5.24). Pour illustrer cette méthode, considérons un problème défini par deux degrés de liberté ( $U_1, U_2$ ). Supposons que la méthode par contrôle de déplacement impose de contrôler le déplacement nodal  $U_2$ . Sur la Figure 5.6 on part d'un point d'équilibre (incrément  $m$ ), on linéarise le problème en considérant la tangente à la courbe au point  $m$ . Par des itérations successives, l'erreur due à la linéarisation est ensuite corrigée. Pour le degré de liberté contrôlé ( $U_2$ ), l'actualisation se fait à la première itération de manière à satisfaire la fonction contrainte (5.29). En revanche, le degré de liberté ( $U_1$ ) évolue avec la facteur de chargement ( $\lambda$ ) durant plusieurs itérations avant d'atteindre l'équilibre (Figure 5.5-a).

A la différence du nœud contrôlé ( $U_2$ ), le deuxième degré de liberté  $U_1$  va évoluer, au fil des itérations, en même temps que le paramètre de chargement  $\lambda$  évolue jusqu'à convergence (Figure 5.5-b).

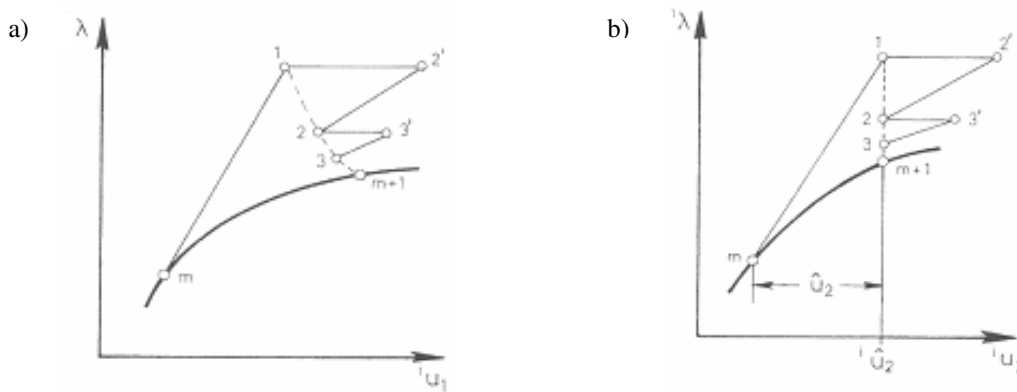


Figure 5.5 : Méthode de contrôle de déplacement [Batoz et al, 1979]

#### 5.4.3.2. Méthode de la longueur d'arc sphérique

Introduite initialement par [Riks, 1972] et [Wempner, 1971], la forme incrémentale de la fonction contrainte associée à cette méthode s'écrit:

$$f(\mathbf{U}, \lambda) = \Delta \mathbf{U}_i^T \Delta \mathbf{U}_i + \Delta \lambda_i^2 \psi^2 \mathbf{f}_{ext}^T \mathbf{f}_{ext} - \Delta l^2 = 0 \quad (5.31)$$

Cette expression revient à imposer que la norme du vecteur  $(\Delta \mathbf{U}, \mathbf{f}_{ext})$  soit égale au rayon  $\Delta l$ . Le coefficient  $\psi$  sert à homogénéiser le vecteur effort avec le champ de déplacement. L'injection de la quatrième équation du système (5.26) dans l'équation (5.31) conduit à l'équation scalaire suivante :

$$a_1 \delta \lambda_i^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (5.32)$$

Où les constantes  $(a_1, a_2, a_3)$  sont définies par :

$$\begin{cases} a_1 = \delta \mathbf{U}_I^{iT} \cdot \delta \mathbf{U}_I^i + \psi^2 \mathbf{f}_{ext}^T \mathbf{f}_{ext} \\ a_2 = 2 \cdot \delta \mathbf{U}_I^{iT} \cdot (\Delta \mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_{II}^i) + 2 \cdot \Delta \lambda_i \cdot \psi^2 \mathbf{f}_{ext}^T \mathbf{f}_{ext} \\ a_3 = (\Delta \mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_{II}^i)^T \cdot (\Delta \mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_{II}^i) - \Delta l^2 + \Delta \lambda_i \cdot \psi^2 \mathbf{f}_{ext}^T \mathbf{f}_{ext} \end{cases} \quad (5.33)$$

La résolution de cette équation de second degré en  $\delta \lambda$  pose, généralement, le problème du choix de la racine appropriée lorsque celle-ci admet deux racines réelles. Egalement et en présence de deux racines complexes, la méthode est mise à défaut.

#### 5.4.3.3. Méthode de la longueur d'arc cylindrique

Ramm [Ramm, 1981] ainsi que Crisfield [Crisfield, 1981] ont noté que pour des problèmes qui présentent un grand nombre de variables, l'effet du terme de chargement devient faible, c'est pourquoi le coefficient  $\psi$  a été supposé nul. On parle alors de la méthode de longueur d'arc cylindrique (Figure 5.6-a).

Dans ces conditions, la fonction contrainte s'écrit :

$$f(\mathbf{U}, \lambda) = \Delta \mathbf{U}_i^T \Delta \mathbf{U}_i - \Delta l^2 = 0 \quad (5.34)$$

La méthode se ramène à la résolution d'une équation de second degré similaire à (5.32) et dont les coefficients correspondent aux coefficients de (5.33) avec  $\psi = 0$ .

Tout comme pour la méthode sphérique, se pose la question du choix de la racine. Crisfield [Crisfield, 1991] considère  $(\delta \lambda_1, \delta \lambda_2)$  les deux racines réelles, il calcule ensuite les deux solutions associées :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{i+1}^1 &= \Delta \mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_i^1 = \Delta \mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_i^{II} + \delta \lambda_1 \cdot \delta \mathbf{U}_i^I \\ \Delta \mathbf{U}_{i+1}^2 &= \Delta \mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_i^2 = \Delta \mathbf{U}_i + \delta \mathbf{U}_i^{II} + \delta \lambda_2 \cdot \delta \mathbf{U}_i^I \end{aligned} \quad (5.35)$$

La solution choisie, selon l'auteur, est celle qui est la plus proche de la direction de l'incrément précédent  $(\Delta \mathbf{U}_i)$ , ce qui correspond dans la pratique à choisir le plus petit angle entre les deux vecteurs  $(\Delta \mathbf{U}_i, \Delta \mathbf{U}_{i+1}^{1,2})$  soit le plus grand des deux cosinus suivants :

$$\cos \theta^{1,2} = \frac{\Delta \mathbf{U}_i^T \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1}^{1,2}}{\Delta l^2} \quad (5.36)$$

#### 5.4.3.4. Méthode de la longueur d'arc linéarisée

Les méthodes de longueur d'arc linéarisées ou méthodes d'orthogonalité ont été introduites pour palier au problème du choix des racines de l'équation de contrainte sphérique et cylindrique. Bruce [Bruce et al, 1987] résume, par une approche générale, les différentes variantes de cette famille de méthodes. Pour ce faire, il considère les vecteurs tangent et normal définis par les expressions suivantes :

$$\mathbf{t}_i = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \beta \cdot \Delta \lambda_i \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{U}_i \\ \beta \cdot \delta \lambda_i \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

où  $\beta$  est un facteur d'homogénéisation.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs n'est autre que la projection du vecteur normal sur le vecteur tangent. On note par  $\mathbf{r}_i, R_i$  respectivement le vecteur projeté et le résidu du produit scalaire :

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i = |\mathbf{t}_i| |\mathbf{n}_i| \cos \alpha = |\mathbf{t}_i| |\mathbf{r}_i| = R_i \quad (5.38)$$

En combinant les relations (5.24), (5.37), (5.38), il est possible d'établir la relation générale suivante du facteur de chargement :

$$\delta \lambda_i = \frac{R_i - \Delta \mathbf{U}_i^T \cdot \delta \mathbf{U}_i''}{\beta^2 \cdot \Delta \lambda_i + \Delta \mathbf{U}_i^T \cdot \delta \mathbf{U}_i'} \quad (5.39)$$

### ***Méthode de mise à jour de la normale***

Introduite par [Ramm, 1981], cette méthode consiste à imposer une condition d'orthogonalité mutuelle entre les deux vecteurs  $\mathbf{t}_i$  et  $\mathbf{n}_i$ , ceci revient à imposer un résidu nul dans l'expression (5.39) qui s'écrit alors :

$$\delta \lambda_i = \frac{-\Delta \mathbf{U}_i^T \cdot \delta \mathbf{U}_i''}{\beta^2 \cdot \Delta \lambda_i + \Delta \mathbf{U}_i^T \cdot \delta \mathbf{U}_i'} \quad (5.40)$$

La Figure 5.6-b illustre les corrections successives de cette méthode. On peut noter qu'au cours des itérations la solution peut s'éloigner du rayon qu'on cherche à imposer. Une autre variante de cette méthode a été introduite par [Riks, 1979] qui considère une condition d'orthogonalité entre le vecteur  $\mathbf{n}_i$  et le vecteur tangent initial  $\mathbf{t}_1$ . Cette méthode présente également l'inconvénient de s'éloigner du rayon consigne Figure 5.6-c.

### ***Méthode de linéarisation consistante***

Pour éviter que la solution ne s'écarte du rayon imposé, une correction est apportée au résidu. La différence de la longueur du vecteur tangent courant et la longueur désirée peut être projetée sur le vecteur tangent pour définir le résidu de l'expression d'orthogonalité [Bruce et al, 1987]:

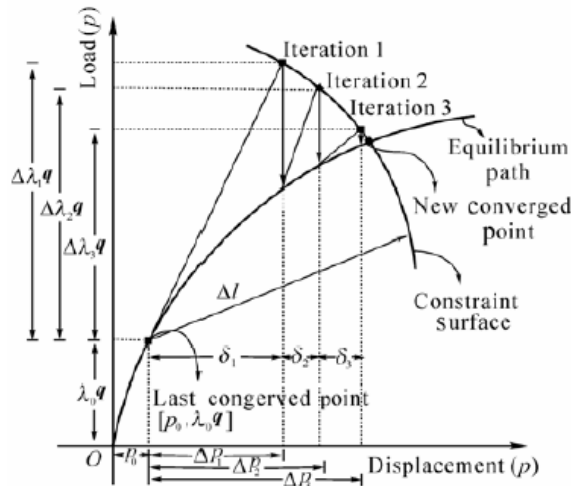
$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i = -|\mathbf{t}_i| |\mathbf{r}_i| = -|\mathbf{t}_i| (|\mathbf{t}_i| - \Delta l) = R_i \quad (5.41)$$

L'expression du facteur de chargement est alors définie par [Schweizerhof et al, 1986] :

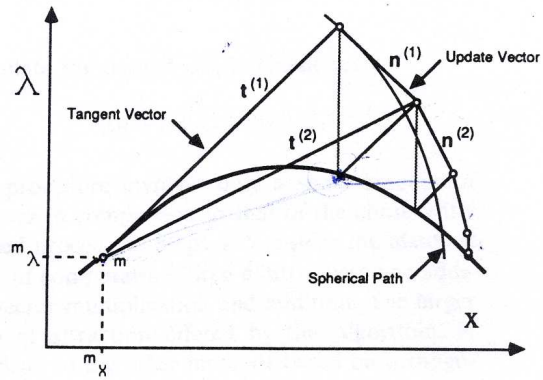
$$\delta \lambda_i = \frac{-|\mathbf{t}_i| (|\mathbf{t}_i| - \Delta l) - \Delta \mathbf{U}_i^T \cdot \delta \mathbf{U}_i''}{\beta^2 \cdot \Delta \lambda_i + \Delta \mathbf{U}_i^T \cdot \delta \mathbf{U}_i'} \quad (5.42)$$

Même si au début la direction de mise à jour s'éloigne du rayon imposé, l'application du résidu ramène le chemin sur le rayon de la sphère [Bruce et al, 1987] (Figure 5.6-d).

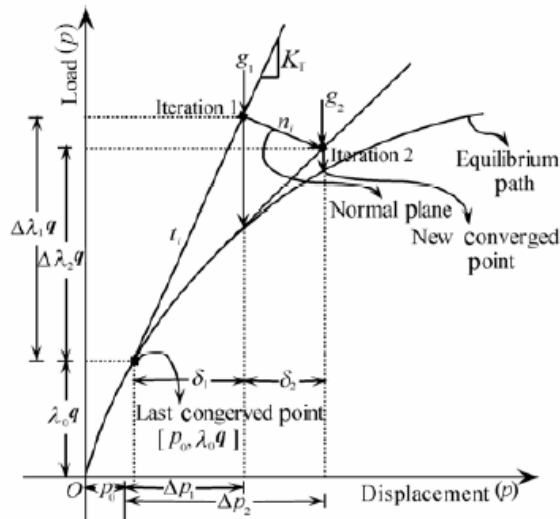




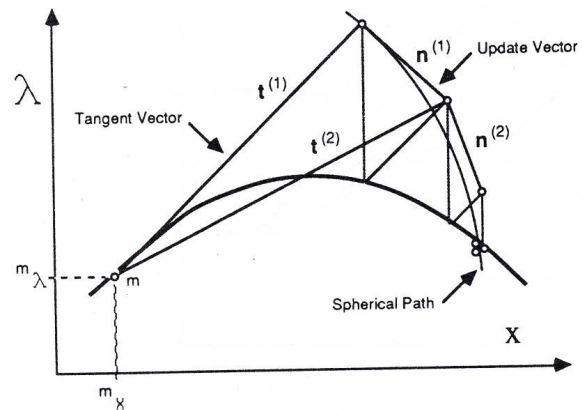
a- Méthode de longueur d'arc cylindrique [Crisfield, 1981].



b- Méthode de mise à jour de la normale [Ramm, 1981].



c- Méthode de Riks [Riks, 1979].



d- Méthode de linéarisation consistante [Bruce et al, 1987].

Figure 5.6 : Les différentes variantes de la méthode de longueur d'arc.

#### 5.4.4. Développement de méthodes de continuation pour une formulation vitesse-pression (Forge3®)

##### 5.4.4.1. Adaptation et notations

Dans la première partie de ce chapitre, la méthode de continuation a été développée pour une formulation éléments finis en déplacement, où les degrés de liberté du problème correspondent aux trois déplacements dans l'espace.

Dans Forge3®, la formulation est mixte en vitesse/pression. On notera à cet effet par  $\mathbf{a}$  le vecteur inconnu du problème:

$$\mathbf{a}^T = (\mathbf{v}, \mathbf{P})^T = (v_1^1 \quad v_1^2 \quad v_1^3 \quad , v_2^1 \quad v_2^2 \quad v_2^3 \quad , ..., v_n^1 \quad v_n^2 \quad v_n^3 \quad , p_1 \quad .. \quad p_n) \quad (5.43)$$

Où  $n$  est le nombre de nœuds du maillage. Nous nous proposons dans la suite de développer la méthode de contrôle de déplacement et la méthode de la longueur d'arc (avec ses différentes variantes) dans le cadre de la formulation mixte de Forge3®. Pour pouvoir y parvenir, nous commençons par définir les quantités introduites dans l'équation (5.18), à savoir  $\lambda, \mathbf{f}_{ext}, \mathbf{F}_{int}, \mathbf{R}$ .

Pour le problème d'hydroformage, on notera par  $\mathbf{F}^{ext}$  :

$$\mathbf{F}^{ext} = \int_{\partial\Omega}^T \mathbf{N}(p, \mathbf{n}) ds = p \int_{\partial\Omega}^T \mathbf{N} \mathbf{n} ds \quad (5.44)$$

On fait apparaître le facteur de chargement  $\lambda$  qui correspond à la pression de gonflage normalisée par une pression  $P_{max}$  fixée par l'utilisateur:

$$\lambda = P / P_{max} \quad (5.45)$$

L'effort extérieur (5.44) s'écrit alors :

$$\mathbf{F}^{ext} = \lambda \mathbf{f}^{ext} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}^{ext} = P_{max} \cdot \int_{\partial\Omega}^T \mathbf{N} \mathbf{n} ds \quad (5.46)$$

A partir du résidu local (5.10), le vecteur résidu global s'écrit :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{vv} + \mathbf{R}^{vp} \\ \mathbf{R}^{pv} + \mathbf{R}^{pp} - {}^T \mathbf{K}^{bp} (\mathbf{K}^{bb})^{-1} \mathbf{R}^b \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Il convient de mettre le vecteur résidu sous la forme définie par l'équation (5.18), c'est pourquoi on introduit le vecteur  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{G} - \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.48)^{10}$$

Partant de l'équation (5.2) et (5.47), le vecteur  $\mathbf{G}$  s'écrit alors:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{int} + \mathbf{R}^{vp} \\ \mathbf{R}^{pv} + \mathbf{R}^{pp} - {}^T \mathbf{K}^{bp} (\mathbf{K}^{bb})^{-1} \mathbf{R}^b \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

où

$$\mathbf{F}_{int} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{S}^l \cdot \mathbf{B}^l dv_e \quad (5.50)$$

---

<sup>10</sup> Dans la suite et pour simplifier les notations, on notera par  $\mathbf{f}_{ext}$  le vecteur  $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ .

Remarque

Par rapport à une formulation en déplacement, où le vecteur résidu est la différence entre le vecteur des efforts intérieurs et le vecteur des efforts extérieurs, on remarque qu'en formulation mixte vitesse-pressure, le vecteur résidu est la différence entre le vecteur  $\mathbf{G}$  et le vecteur des efforts extérieurs. Le vecteur  $\mathbf{G}$  comporte non seulement les efforts intérieurs mais aussi les termes liés à la condition d'incompressibilité.

Par analogie avec la formulation en déplacement, la méthode de la longueur d'arc en vitesse-pressure se ramène à la résolution de deux systèmes linéaires définis par :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_i \delta \mathbf{a}_i^I &= \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{K}_i \delta \mathbf{a}_i^{II} &= -(\mathbf{G}_i - \lambda_i \mathbf{f}_{ext}) = -\mathbf{R}_i\end{aligned}\quad (5.51)$$

Le vecteur solution du problème s'écrit comme une combinaison linéaire des deux vecteurs  $\delta \mathbf{a}_i^I, \delta \mathbf{a}_i^{II}$  :

$$\delta \mathbf{a}_i = \delta \lambda_i \cdot \delta \mathbf{a}_i^I + \delta \mathbf{a}_i^{II} \quad (5.52)$$

Dans cette expression, le facteur de chargement est calculé en fonction de la méthode de continuation utilisée. Comme ces méthodes sont exprimées en fonction du champ de déplacement, nous utiliserons la transformation proposée par [Hashagen, 1999], pour les adapter à une écriture en vitesse:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{U}_i &= \mathbf{V}_i \Delta t \\ \delta \mathbf{U}_i &= \delta \mathbf{V}_i \Delta t\end{aligned}\quad (5.53)$$

Où  $\Delta t$  est le pas de temps de l'incrément de calcul.

5.4.4.2. Formulation détaillée

Les méthodes de continuation sont des méthodes incrémentales itératives. Le calcul de chaque incrément comporte deux étapes : une étape de prédiction linéaire, suivie par une procédure itérative de correction qui vise à converger vers un point situé sur la courbe d'équilibre définie dans l'espace  $(\mathbf{a}, \lambda)$ .

**a. Prédiction**

Pour résoudre le problème, une première étape de prédiction des valeurs initiales des incréments  $\Delta \mathbf{V}_1$  et  $\Delta \lambda_1$  permet de démarrer le processus itératif.

Notons par l'indice 0 l'état d'équilibre en début d'incrément, le développement de Taylor à l'ordre 1 de l'équation d'équilibre conduit à:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}_1, \lambda_0 + \Delta \lambda_1) &= \mathbf{R}(\mathbf{a}_0, \lambda_0) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a}_0, \lambda_0) \Delta \mathbf{a}_1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda}(\mathbf{a}_0, \lambda_0) \Delta \lambda_1 \\ \mathbf{R}(\mathbf{a}_0, \lambda_0) &= 0\end{aligned}\quad (5.54)$$

En supposant que l'incrément prédit vérifie l'équation d'équilibre, le résidu du membre gauche de la première équation est alors nul, on obtient :

$$\Delta \mathbf{a}_1 = \Delta \lambda_1 (K_0^{-1} \mathbf{f}_{ext}) = \Delta \lambda_1 \cdot \Delta \mathbf{a}_1' \quad (5.55)$$

A noter que pour la phase de prédiction,  $\Delta \mathbf{a}_1''$  est nul puisque les itérations démarrent à partir d'un état d'équilibre. Concernant le facteur de chargement  $\Delta \lambda_1$ , il sera calculé en fonction de la méthode adoptée.

#### Méthode de contrôle de déplacement adaptée

Le principe de la méthode de contrôle de déplacement consiste à imposer à un nœud donné, un déplacement  $\Delta l$  durant l'incrément de temps. En tenant compte des équations (5.53) et (5.55), le déplacement imposé s'écrit alors

$$\Delta l = \Delta t \cdot \Delta v_1^* = \Delta t \cdot \Delta \lambda_1 \cdot \Delta v_1'^* \quad (5.56)$$

L'exposant (\*) désigne la composante du vecteur vitesse du nœud de contrôle. A partir de cette expression, il est aisé de calculer l'incrément de chargement  $\Delta \lambda_1$  si on connaît le pas de temps.

A la différence d'une formulation en déplacement, pour une formulation en vitesse, le pas de temps devient une inconnue supplémentaire du problème qu'il convient de calculer. Cette variable conditionne l'amplitude du déplacement, lui-même conditionné par la fonction contrainte. Il est par conséquent nécessaire de définir une troisième équation qui gère le pas de temps. Dans ces conditions, le problème (5.18) est reformulé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{a}, \lambda) = \mathbf{G}(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{f}_{ext} = 0 \\ f(\mathbf{a}, \lambda) = 0 \\ h(\lambda, t) = 0 \end{cases} \quad (5.57)$$

Où la fonction  $h$  décrit la loi d'évolution du pas de temps. Il est possible de résoudre ce problème de dimension  $n + 2$  par une méthode de Newton Raphson. Mais, pour éviter d'augmenter la complexité du problème, nous avons considéré une relation linéaire entre le facteur de chargement et le pas de temps. L'idée principale de cette hypothèse est de définir un temps  $T$  nécessaire pour appliquer le chargement total ( $\lambda = 1$ ). De là, la relation de linéarité s'écrit :

$$\frac{\Delta \lambda_1}{1} = \frac{\Delta t_1}{T} \quad (5.58)$$

Cette hypothèse permet de contrôler la vitesse d'application de la pression via le paramètre  $T$  ; plus  $T$  augmente, moins la vitesse d'application de la pression est importante. La vitesse de pression peut être interprétée comme un contrôle par débit sans l'être rigoureusement.

En combinant maintenant l'équation (5.58) avec l'équation (5.56), on déduit :

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \sqrt{\frac{\Delta l \cdot T}{\Delta v_1'^*}} \\ \Delta \lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta l}{T \cdot \Delta v_1'^*}} \end{cases} \quad (5.59)$$

Méthode cylindrique et linéaire consistante adaptée

L'étape de prédiction pour les méthodes de longueur d'arc cylindrique et linéaire est identique à la méthode précédente; la fonction contrainte impose à la norme du vecteur incrément de déplacement qu'elle soit égale à la longueur d'arc  $\Delta l$ , soit:

$$\Delta l = \Delta t_1 \cdot \sqrt{\Delta \mathbf{v}_1^T \cdot \Delta \mathbf{v}_1} = \Delta t_1 \cdot \Delta \lambda_1 \cdot \sqrt{\Delta \mathbf{v}_1^{I^T} \cdot \Delta \mathbf{v}_1^I} \quad (5.60)$$

De la même manière, en considérant l'hypothèse de linéarité (5.58), le pas de temps et le facteur de chargement sont calculés comme:

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{\Delta l \cdot T}{\|\Delta \mathbf{v}_1^I\|}} \quad ; \quad \Delta \lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta l}{T \cdot \|\Delta \mathbf{v}_1^I\|}} \quad (5.61)$$

Un point crucial pour qu'une méthode de continuation soit en mesure de suivre le chemin d'équilibre, est le choix approprié du signe de l'incrément du facteur de chargement (5.59) et (5.61). Plusieurs procédures ont été proposées. Parmi les plus connues, celle qui considère le signe du déterminant de la matrice de rigidité comme indicateur du signe de l'incrément de chargement [Wagoner, 1988]:

$$\text{sign}(\Delta \lambda_1) = \text{sign}(\|\mathbf{K}\|) \quad (5.62)$$

En effet, durant la phase ascendante (i.e. un facteur de chargement croissant), la matrice de raideur est définie positive et son déterminant est positif, le facteur de chargement est donc de signe positif. Au passage par un point limite, la matrice de rigidité devient instantanément singulière (i.e.  $|\mathbf{K}| = 0$ ), après quoi le déterminant change de signe [Wagoner, 1988], il devient négatif sur la branche descendante.

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite le calcul du déterminant de la matrice de raideur à chaque incrément. Ce calcul peut être abordable lorsqu'un solveur direct est utilisé. Cependant, pour des solveurs itératifs, l'estimation du déterminant est beaucoup plus coûteuse.

Feng [Feng et al, 1995], [Feng et al, 1996] ont proposé une autre procédure plus simple à mettre en œuvre et moins coûteuse en moyen de calcul. Pour une formulation en déplacement, ils considèrent que le signe du facteur de chargement coïncide avec le signe du produit scalaire de l'ancien incrément de déplacement  $\Delta \mathbf{U}_n$  par le vecteur tangent de prédiction  $\Delta \mathbf{U}_1^I$  :

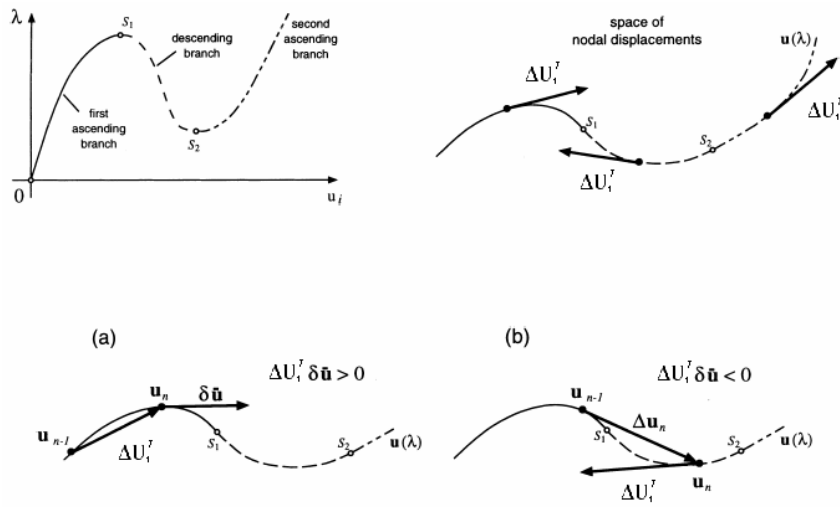
$$\text{sign}(\Delta \lambda_1) = \text{sign}(\Delta \mathbf{U}_n^T \cdot \Delta \mathbf{U}_1^I) \quad (5.63)$$

Une illustration des deux vecteurs ( $\Delta \mathbf{U}_n, \Delta \mathbf{U}_1^I$ ) est présentée sur la Figure 5.7. Pour une interprétation géométrique plus complète de ce critère, nous invitons le lecteur à lire les travaux de [Souza Neto et al, 1999] où les auteurs démontrent la fiabilité de ce critère pour suivre des chemins d'équilibre assez complexes.

L'adaptation de ce critère pour une formulation en vitesse s'écrit :

$$\text{sign}(\Delta \lambda_1) = \text{sign}(\mathbf{v}_0^T \cdot \Delta \mathbf{v}_1^I) \quad (5.64)$$

Où  $\mathbf{v}_0$  est le champ de vitesse d'équilibre au début de l'incrément.



### b. Correction

Une fois la prédiction calculée, il reste à corriger de façon itérative la solution calculée pour converger vers un état d'équilibre. A chaque itération ( $i$ ) les deux équations du système (5.51) sont résolues, le facteur de chargement est calculé selon la méthode utilisée.

Par ailleurs, comme l'incrément de temps est nécessaire dans l'estimation du facteur de chargement, il est donc calculé en début de chaque itération en se basant sur l'hypothèse de linéarité :

$$\Delta t_i = \Delta t_1 \frac{\Delta\lambda_i}{\Delta\lambda_1} \quad (5.65)$$

où  $\Delta\lambda_i$  correspond au facteur de chargement de l'itération précédente.

#### Méthode de contrôle de déplacement adaptée

Moyennant l'équation (5.30), le facteur de chargement exprimé en fonction du déplacement, est transformé en :

$$\delta\lambda_i = \frac{\Delta l - \Delta t_i \cdot [v_i^{i*} + \delta v_i^{II*}]}{\Delta t_i \cdot \delta v_i^{I*}} \quad (5.66)$$

#### Méthode cylindrique adaptée

Pour la méthode de la longueur d'arc cylindrique, le facteur de chargement est calculé en résolvant une équation de second ordre identique à l'équation (5.32), avec :

$$\begin{cases} a_1 = \Delta t_i^2 \cdot (\delta \mathbf{v}_i^I)^T \cdot \delta \mathbf{v}_i^I \\ a_2 = 2 \cdot \Delta t_i^2 \cdot (\delta \mathbf{v}_i^I)^T \cdot (\mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i^I) \\ a_3 = \Delta t_i^2 \cdot (\mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i^I)^T \cdot (\mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i^I) - \Delta l^2 \end{cases} \quad (5.67)$$

Dans le cas où l'équation admet deux racines réelles, la solution choisie est celle qui est la plus proche de la direction de l'incrément précédent ( $\mathbf{v}_i$ ), ce qui correspond dans la pratique à choisir le plus grand des deux cosinus suivants :

$$\cos \theta^{1,2} = \frac{\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{v}_{i+1}^{1,2}}{\Delta l^2} \quad (5.68)$$

Où  $\mathbf{v}_{i+1}^{1,2}$  sont les deux solutions possibles calculées à partir des deux solutions réelles de l'équation contrainte :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+1}^1 &= \mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i^I + \delta \lambda_1 \cdot \delta \mathbf{v}_i^I \\ \mathbf{v}_{i+1}^2 &= \mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i^I + \delta \lambda_2 \cdot \delta \mathbf{v}_i^I \end{aligned} \quad (5.69)$$

#### Méthode cylindrique linéarisée

De la même façon que pour une formulation en déplacement (5.42), le facteur de chargement est calculé selon la relation transformée suivante :

$$\delta \lambda_i = \frac{-b_3 \cdot (b_3 - \Delta l) - b_1}{\beta^2 \cdot \Delta \lambda_i + b_2} \quad (5.70)$$

Et où les paramètres ( $b_1, b_2, b_3$ ) sont définis par :

$$\begin{cases} b_1 = \Delta t_i^2 \cdot (\mathbf{v}_i)^T \cdot \delta \mathbf{v}_i^I \\ b_2 = \Delta t_i^2 \cdot (\mathbf{v}_i)^T \cdot \delta \mathbf{v}_i^I \\ b_3 = \sqrt{(\beta \cdot \Delta \lambda_i)^2 + \Delta t_i^2 \cdot (\mathbf{v}_i)^T \cdot \mathbf{v}_i} \end{cases} \quad (5.71)$$

La valeur du paramètre  $\beta$  peut varier entre 0 et 1. Dans le cas de nos applications, on a choisi une valeur de 1.

#### 5.4.4.3. Mise en œuvre de la méthode

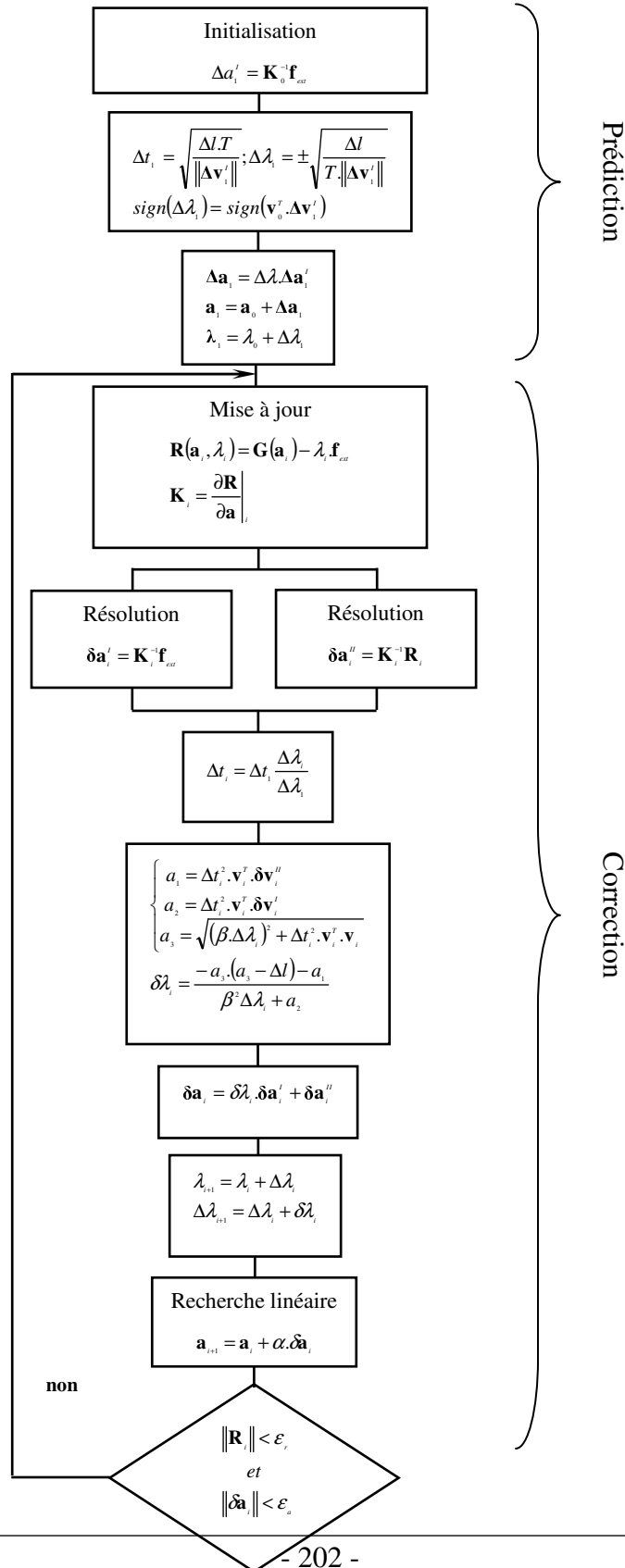
En résumé, les méthodes de continuation comportent une étape de prédiction suivie par une étape de correction itérative, laquelle nécessite généralement d'être associée à une méthode de recherche linéaire et arrêtée selon un critère de convergence.

##### **a. Algorithme**

On résume sur la Figure 5.8 l'algorithme global que nous avons implémenté pour la résolution du problème d'hydroformage. Cet algorithme est présenté pour une méthode cylindrique linéarisée. Notons qu'il reste identique pour les autres méthodes (contrôle de déplacement, longueur d'arc cylindrique), il suffit d'utiliser l'équation de charge appropriée.

Fondamentalement, les méthodes de continuation reposent sur la résolution de deux systèmes linéaires. Si la matrice de raideur reste identique pour ces deux systèmes linéaires, seul le second membre est changé (5.51). La deuxième équation du système correspond à celle résolue par la méthode standard de contrôle d'effort. En revanche, dans la première équation, le second membre décrit un vecteur effort d'une amplitude  $\lambda = 1$ . Résoudre cette équation revient à trouver le champ de vitesse-pressure assurant l'équilibre de la structure lorsqu'elle est soumise à un effort  $\lambda = 1$  et ce en supposant que le matériau admet une rigidité constante correspondant à sa matrice de rigidité courante. En d'autres termes, ce problème est équivalent à une méthode de contrôle d'effort où le chargement s'applique en un seul incrément. Compte tenu de l'écart considérable entre l'état d'équilibre courant et l'état d'équilibre recherché, les solveurs itératifs utilisés ont montré de grandes difficultés de convergence (augmentation considérable du nombre d'itérations). En effet, les solveurs itératifs, type résidu conjugué, cherche à minimiser d'une manière itérative le résidu du système linéaire. Si la solution initiale de ce problème se trouve éloignée de la solution recherchée, des problèmes de convergence peuvent émerger. Nous avons donc été amené à utiliser un solveur direct par décomposition LU pour résoudre les deux systèmes. L'inconvénient de telle méthode reste bien évidemment les temps de calculs et l'espace mémoire requis.





↓ oui

Figure 5.8 : Algorithme de calcul par la méthode de la longueur d'arc.

### **b. Recherche linéaire**

La convergence de l'algorithme de résolution d'un système non linéaire par une méthode itérative (5.51 et 5.52) n'est pas toujours garantie. Il est bien établi qu'une méthode de recherche linéaire est nécessaire pour assurer la convergence.

Une méthode de recherche linéaire a pour objectif de déterminer un scalaire  $\alpha$  servant à définir l'amplitude de la correction à apporter au vecteur inconnu calculé à chaque itération de la phase de correction :

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i + \alpha \cdot \delta \mathbf{a}_i \quad (5.72)$$

#### Approche de Crisfield [Crisfield, 1991]

Selon Crisfield [Crisfield, 1991], le scalaire  $\alpha$  doit satisfaire une condition de stationnarité de l'énergie potentielle  $\phi$  :

$$\alpha = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \phi(\mathbf{a}_i + \alpha \cdot \delta \mathbf{a}_i) \quad (5.73)$$

La détermination du pas est donc un problème d'optimisation, autrement dit :

$$s(\alpha) = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = \delta \mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{R}(\mathbf{a}(\alpha)) = 0 \quad (5.74)$$

Cette condition est trop contraignante et coûteuse en temps de calcul. Dans la pratique, elle est relaxée et remplacée par la relation suivante qui vise à minimiser le module  $s(\alpha)$  par rapport au module initial  $s(0)$  :

$$|s_j(\alpha_j)| < 0.8 |s_0(\alpha_0 = 0)| \quad (5.75)$$

Dans cette expression le facteur 0.8 est introduit par l'auteur comme étant une valeur empirique convenable.

Pour déterminer la valeur du pas  $\alpha$ , plusieurs techniques de recherche linéaire peuvent être utilisées dont celle suggérée par [Crisfield, 1983] ; la procédure repose sur une interpolation linéaire entre les points  $\alpha_0 = 0$  et  $\alpha_1 = 1$  pour déduire  $\alpha_2$  :

$$\alpha_2 = \frac{-s_0}{s_1 - s_0} \quad (5.76)$$

Une généralisation de cette procédure pour les itérations successives  $j$ , s'écrit :

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j \left( \frac{-s_0}{s_j - s_0} \right) \quad (5.77)$$

Notons que cette écriture suppose une interpolation linéaire entre l'itération actuelle et celle correspondant à  $\alpha_0 = 0$ . Une telle procédure n'est pas toujours appropriée puisque une interpolation suppose implicitement que  $s_0$  et  $s_j$  sont de signes opposés. Dans le cas contraire, on parle alors d'extrapolation pour laquelle il est nécessaire de contrôler le pas pour éviter des valeurs trop élevées.

#### Approche implémentée dans Forge3®

La recherche linéaire utilisée dans Forge3® repose sur approche différente de celle développée plus haut. En effet, la recherche linéaire a pour objectif de réduire non plus l'énergie, mais plutôt la norme du résidu :

$$\alpha = \min_{\alpha \in \mathcal{R}} \|\mathbf{R}(\mathbf{a}_i + \alpha \delta \mathbf{a}_i)\| \quad (5.78)$$

Ce critère se révèle en pratique efficace, en revanche aucun résultat ne peut être obtenu sur la convergence de l'algorithme de N-R couplé à ce critère.

Pour atteindre ce critère, une méthode de « backtracing » est utilisée. Il s'agit de remplacer  $\alpha$  par une succession de valeurs ( $1, \tau, \tau^2, \tau^3 \dots$ ) avec  $\tau$  un paramètre inférieur à 1 fixé par l'utilisateur, en l'occurrence (1/1.5) et ce jusqu'à minimisation du résidu.

Une technique de recherche hybride a été proposé par Coste [Coste, 2004] et implémentée dans le cadre de ce travail. L'approche utilise la technique de Crisfield lorsque la condition d'interpolation est satisfaite et lorsqu'une extrapolation « raisonnable » est possible. A défaut, la méthode de recherche de « backtracing » est enclenchée. La combinaison de ces deux techniques permet la réduction du nombre de recherches linéaires globales au cours de la simulation.

#### **c. Critère de convergence**

L'opération de correction est répétée jusqu'à ce qu'un point d'équilibre, situé à la distance  $\Delta l$  du point de départ, soit atteint. Un critère de convergence est donc nécessaire pour assurer la condition d'équilibre. Comme le résidu tend à s'annuler en s'approchant de l'état d'équilibre, le plus souvent la norme du résidu est utilisée pour évaluer l'état de convergence. La norme utilisée correspond à la norme euclidienne :

$$\|\mathbf{R}_i\| < \varepsilon_r \quad (5.79)$$

Où  $\varepsilon_r$  est le seuil de convergence du résidu. Dans la pratique nous utilisons un seuil de ( $10^{-7} \sim 10^{-8}$ ). Cependant, on a pu observer que pour certains cas, ce critère est insuffisant et que malgré la faible valeur du seuil pour le résidu, on peut observer des variations au niveau du vecteurs des inconnues (i.e le champ de vitesse n'a pas atteint un état stationnaire). C'est pourquoi, il a fallu rajouter un deuxième critère qui permet de s'assurer qu'à la fin des itérations, le vecteur inconnu ne varie plus, autrement :

$$\|\delta \mathbf{a}_i\| < \varepsilon_a \quad (5.80)$$

Où  $\varepsilon_a$  est le seuil de convergence du vecteur inconnu. Dans la pratique nous utilisons une valeur de  $(10^{-5} \sim 10^{-6})$ .

On fixe aussi un nombre maximum d'itération, si le critère de convergence n'est pas satisfait après  $iter_{max}$ , la phase de correction est alors reprise avec une longueur d'arc plus faible. Dans le cas où la convergence n'est toujours pas atteinte, le problème est alors linéarisé, autrement dit, la loi de comportement est remplacée par une loi de comportement élastique linéaire. Cette opération simplifie le problème et assure le plus souvent une convergence convenable. Après convergence, la phase de correction est relancée en considérant comme solution initiale de la procédure itérative non plus la solution de l'incrément précédent mais plutôt la solution trouvée après linéarisation.

Ces conditions de convergence peuvent s'avérer indispensables en particulier à l'approche du point limite voire même lors de la phase de déformation stable où il peut s'avérer nécessaire d'entreprendre des reprises de calcul.

#### 5.4.4.4. Validation de la méthode

Afin de valider l'implémentation des méthodes de continuation dans le cadre du comportement élasto-plastique, nous allons considérer les résultats de la simulation par le code de calcul Forge3® standard (contrôle d'effort) comme solution de référence. Ce code a été largement utilisé et validé.

L'essai de validation est l'essai de gonflage circulaire (Figure 5.2). Une tôle d'épaisseur 1mm avec un comportement isotrope de von Mises et avec une loi d'écrouissage  $\bar{\sigma} = 525.(0.001 + \bar{\varepsilon})^{0.14}$  est considérée. La vitesse de montée en pression pour le calcul de référence est de 0.3 bars/s avec un pas de temps de 0.1 s. Parmi les méthodes de continuation, on choisi d'effectuer la validation sur la méthode de contrôle de déplacement avec une pression maximale de 30 bars pour une durée d'application de 1000s (i.e 0.3 bars/s). Le nœud situé au pôle de la tôle est le nœud de contrôle avec un déplacement incrémental imposé de 0.25 mm.

Le résultat des deux simulations est reporté sur la Figure 5.9. Durant la phase stable de l'essai, on note une parfaite correspondance entre la courbe de charge calculée par la méthode de continuation et la courbe de référence. Ceci constitue donc une validation de la bonne implémentation de la méthode de continuation par contrôle de déplacement. Au-delà du pic, on note l'arrêt de la méthode de calcul standard, alors que la méthode de continuation est en mesure de simuler la phase descendante de la courbe.

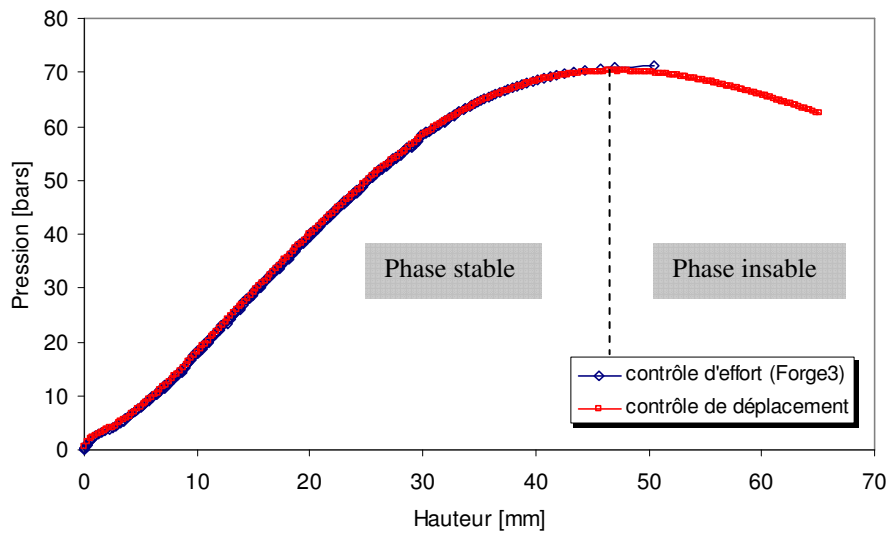


Figure 5.9 : Validation de la méthode de continuation par contrôle de déplacement sur un essai de gonflage circulaire.

Pour une méthode de contrôle de déplacement la fonction contrainte (5.29) impose au nœud de contrôle un déplacement incrémental égal à la longueur d'arc choisie. Sur la Figure 5.10 est reporté le déplacement incrémental du nœud de contrôle (nœud situé au pôle de la tôle). Cette figure montre que la consigne de 0.25 mm par incrément est parfaitement respectée tout au long de la simulation sauf à l'incrément 190 où on observe une réduction du déplacement. Ceci est la conséquence de la procédure de reprise (§ 5.4.4.3-c) qui s'est déclenchée au niveau de cet incrément suite à des difficultés de convergence. A noter que l'incrément 190 correspond au passage par le pic de pression.

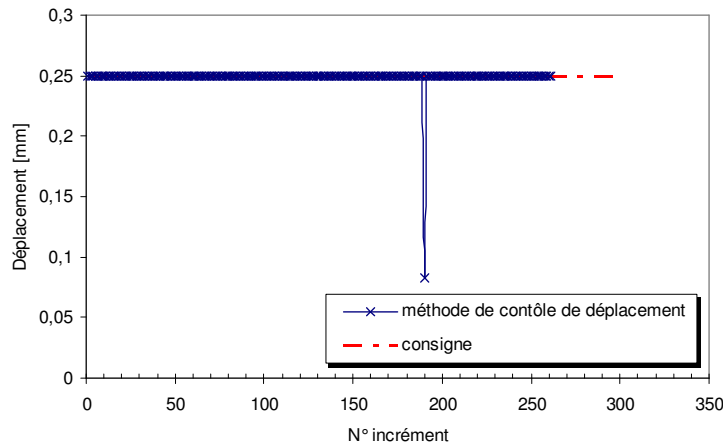


Figure 5.10 : Evolution du déplacement du nœud du contrôle au cours de la simulation d'un essai de gonflage circulaire par la méthode de contrôle de déplacement.

D'un point de vue convergence, la Figure 5.11 illustre l'évolution de la norme du résidu d'équilibre au cours des itérations de la méthode de continuation par contrôle de déplacement. On note une décroissance régulière du résidu avec une convergence, généralement, atteinte au bout de 6 à 8 itérations pour la phase stable et seulement 5 itérations durant la phase instable. L'accélération de la

convergence en phase instable est très marquée, nous pensons qu'elle est probablement due au changement de la nature des équations (matrice de rigidité définie négative).

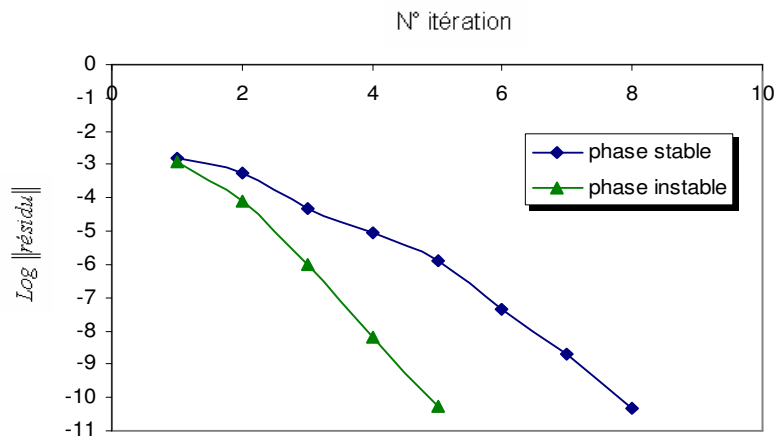


Figure 5.11 : Convergence de la méthode de continuation par contrôle de déplacement.

#### 5.4.4.5. Effet de la longueur d'arc

Les simulations par les méthodes de continuation sont contrôlées par la longueur d'arc imposée à chaque incrément. Nous reprenons ici l'exemple du paragraphe précédent (§ 5.4.4.4) pour évaluer l'effet de la variation du déplacement incrémental imposé (la longueur d'arc) sur la convergence d'une méthode de continuation par contrôle de déplacement.

La Figure 5.12 résume les courbes de chargement retrouvées pour différentes longueurs d'arc. On note une convergence de la méthode pour des longueurs d'arc  $\leq 1$  mm. En revanche, des oscillations traduisant des difficultés de convergence sont visibles pour une longueur d'arc de 1.5 mm.

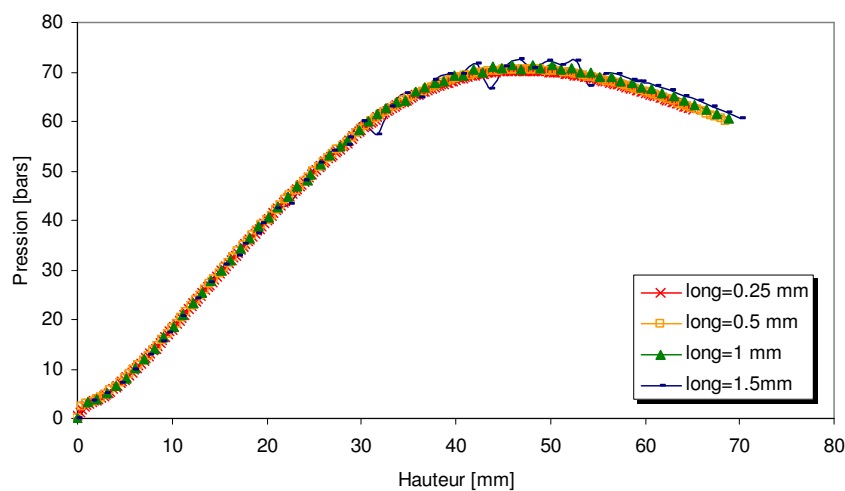


Figure 5.12 : Courbe de chargement d'un essai de gonflage circulaire simulé par la méthode de contrôle de déplacement : effet de la longueur d'arc.

Cet exemple simple permet d'estimer la longueur d'arc à utiliser pour une simulation par méthode de contrôle de déplacement à une valeur située entre 1/2 et 1 fois l'épaisseur de la tôle.

#### 5.4.4.6. Evaluation de la convergence au sens des éléments finis

Etant donné que les méthodes de continuation interviennent au niveau du calcul du champ de vitesse et de pression, il est nécessaire de s'assurer que le taux de convergence de la méthode éléments finis n'est pas affecté. En théorie, pour une formulation mixte vitesse-pression avec une approximation linéaire P1+/P1, le taux de convergence (relatif à l'erreur de calcul de la contrainte) est linéaire lorsque le comportement est élastique.

On considère à cet effet l'essai de gonflage d'un cylindre épais de longueur infini élastique. L'erreur sera estimée par l'écart entre la contrainte analytique et la contrainte éléments finis. L'évaluation du taux de convergence d'une méthode consiste à étudier l'évolution de l'erreur en fonction de la taille du maillage. Généralement, pour une évaluation précise de l'ordre de convergence d'une méthode éléments finis, l'erreur est définie par une norme de l'écart entre le tenseur de contrainte numérique et le tenseur des contraintes solution analytique exacte du problème.

L'objectif ici étant d'apprécier l'évolution de l'erreur en fonction de la taille de maillage. C'est pourquoi on se contentera d'évaluer l'erreur par rapport à la composante circonférentielle du tenseur de contrainte. L'erreur sera définie comme la moyenne des écarts mesurés entre la solution analytique exacte  ${}^n\sigma_{\theta\theta}$  à l'élément  $n$  et la solution éléments finis  ${}^n\sigma_{\theta\theta}^h$  (au même élément). La moyenne étant définie sur le profil radial des contraintes :

$$e = \frac{1}{nbelt} \sum_{n=1}^{nbelt} \left| \frac{{}^n\sigma_{\theta\theta} - {}^n\sigma_{\theta\theta}^h}{{}^n\sigma_{\theta\theta}} \right| \quad (5.81)$$

Avec  $nbelt$  le nombre d'éléments situés sur le rayon.

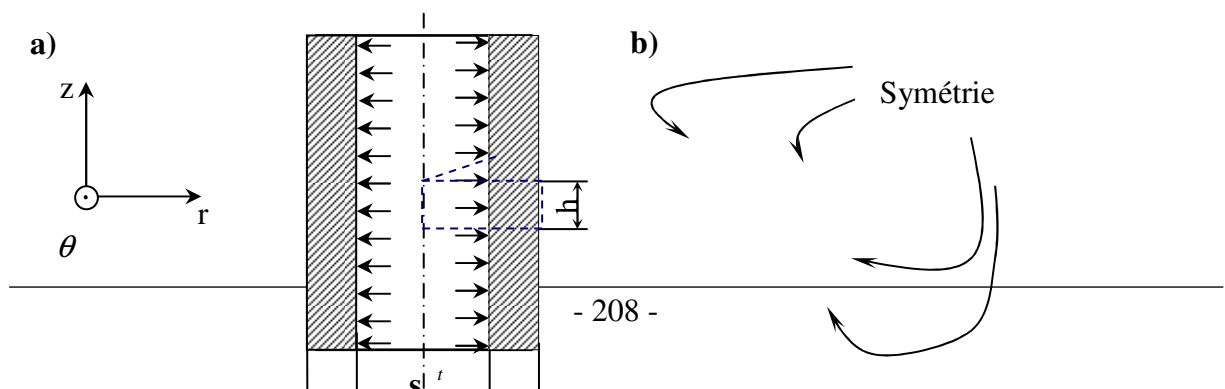
##### **a. Modèle analytique**

On se propose de déterminer la solution analytique exacte du problème classique de gonflage d'un cylindre élastique compressible. Le cylindre est considéré infiniment long suivant son axe  $z$ . Le cylindre est de rayon intérieur ( $R_{int} = 10mm$ ) et de rayon extérieur ( $R_{ext} = 15mm$ ). Il est soumis à une pression croissante sur sa paroi interne et une paroi externe libre (Figure 5.13-a).

Les paramètres d'élasticité du matériau sont : un module de Young  $E = 200GPa$ , et un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

La résolution analytique de ce problème conduit à l'expression analytique de l'évolution du champ de contrainte en fonction de la position radiale suivante:

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = p \cdot \left( \frac{R_{ext}^2}{r^2} + 1 \right) / \left( \frac{R_{ext}^2}{R_{int}^2} - 1 \right) \quad (5.82)$$



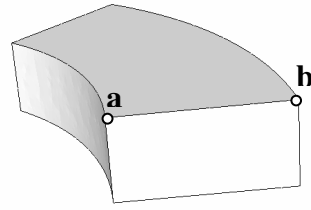


Figure 5.13 : Géométrie d'un tube sous pression.

### ***b. Evaluation numérique***

Pour la simulation numérique du test de gonflage, on considère par symétrie, une portion représentant un  $1/8$  du cylindre avec une hauteur ( $h=2.5\text{mm}$ ) et dont les faces latérales, supérieure et inférieure correspondent à des plans de symétrie (Figure 5.13-b).

Pour les calculs éléments finis, on considère les trois maillages représentés sur la Figure 5.14. L'erreur définie par l'équation (5.81) sera calculée sur le segment  $[a, b]$ .

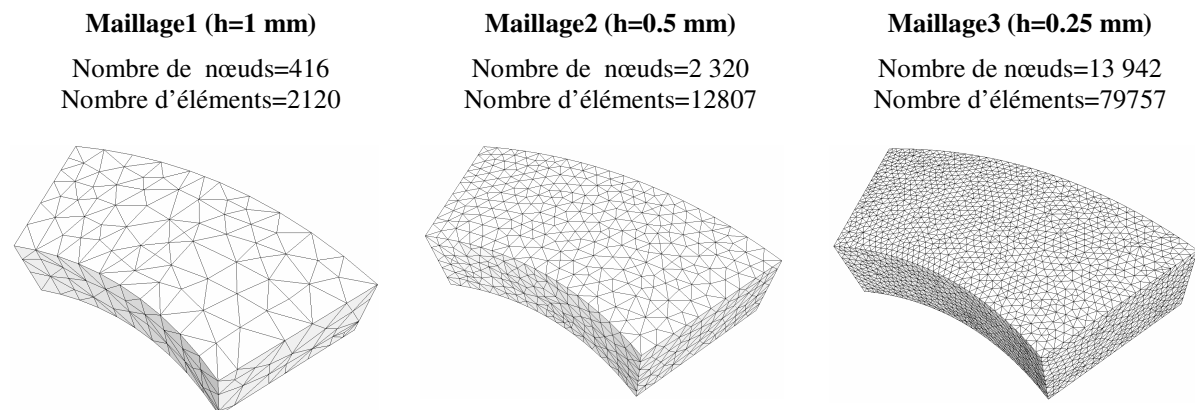


Figure 5.14 : différents maillages utilisés pour le test de convergence.

L'évolution de l'erreur en fonction de la taille du maillage est reportée sur la Figure 5.15. Les résultats montrent des taux de convergence comparables entre les différentes méthodes de continuation et la méthode de résolution standard de Forge3®. Les écarts notés par rapport au taux de convergence théorique de 1 sont probablement dus à la norme utilisée. Ces tests confirment bien la convergence au sens des éléments finis des méthodes de continuation.



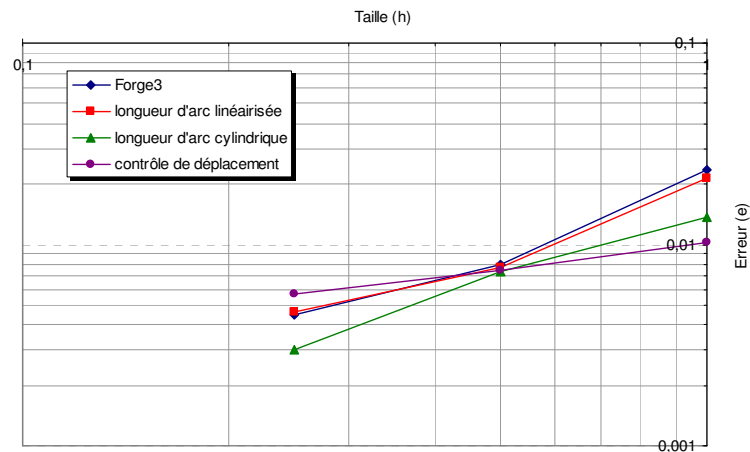


Figure 5.15 : Evolution de l'erreur en fonction de la taille du maillage.

#### 5.4.4.7. Comparaison des trois méthodes de continuation

A l'origine, nous avons commencé par implémenter la méthode de contrôle de déplacement modifiée pour simuler la phase instable d'un essai de gonflage circulaire. La méthode s'est avérée opérationnelle et a permis de dépasser le pic de pression comme en témoigne la Figure 5.9.

C'est à la suite d'une étude de sensibilité de l'influence du coefficient d'anisotropie (avec un critère de Hill48 en anisotropie normale) sur l'essai de gonflage circulaire, qu'on s'est rendu compte que la méthode de contrôle de déplacement ne parvient pas à dépasser le pic de pression lorsque le coefficient d'anisotropie dépasse la valeur 1.2. Certains auteurs [Zhou et al, 1994], [de Borst, 1987] ont souligné la divergence de certaines méthodes de continuation face à des problèmes à forte non linéarité comportementale. Le choix d'une méthode de continuation en particulier est étroitement lié au type de problème traité.

C'est pourquoi, on a implémenté les deux méthodes de continuation par longueur d'arc et longueur d'arc linéarisée. Le problème de convergence a pu ainsi être résolu et l'étude de sensibilité menée à terme (Figure 5.16). Nous reviendrons sur l'interprétation de ces courbes au chapitre suivant.

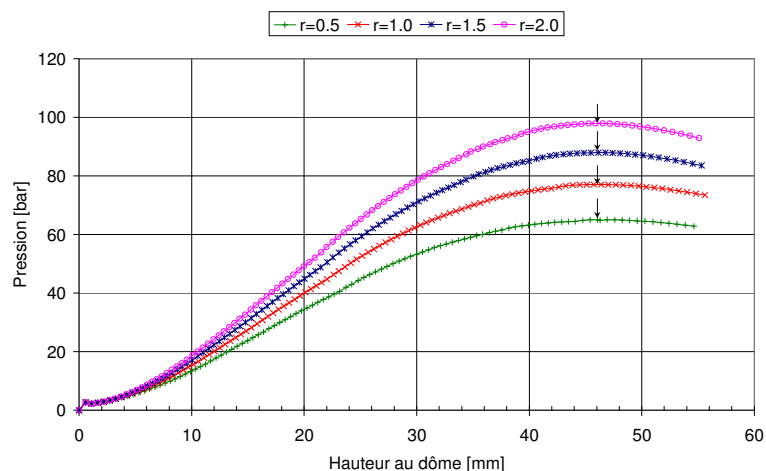


Figure 5.16 : Effet du coefficient d'anisotropie sur la courbe pression-hauteur.

A présent, considérons le cas d'un comportement isotrope pour lequel les trois méthodes de continuation convergent. On souhaite comparer leurs performances relatives en terme de vitesse de convergence. Pour la méthode de contrôle de déplacement on impose un déplacement de 0.8mm par incrément au nœud situé au pôle de la tôle. Afin d'avoir sensiblement le même déplacement par incrément, quelques simulations ont conduit au choix d'une longueur d'arc de 7mm pour les méthodes de longueur d'arc et de longueur d'arc linéarisée. Le cas test étudié étant identique à celui du paragraphe §3.

Les résultats présentés sur la Figure 5.17 montre le nombre d'itérations nécessaires par incrément pour atteindre la convergence. On note que globalement la méthode de contrôle de déplacement est légèrement plus rapide que les méthodes de longueur d'arc. Celles-ci présentent des convergences très proches.

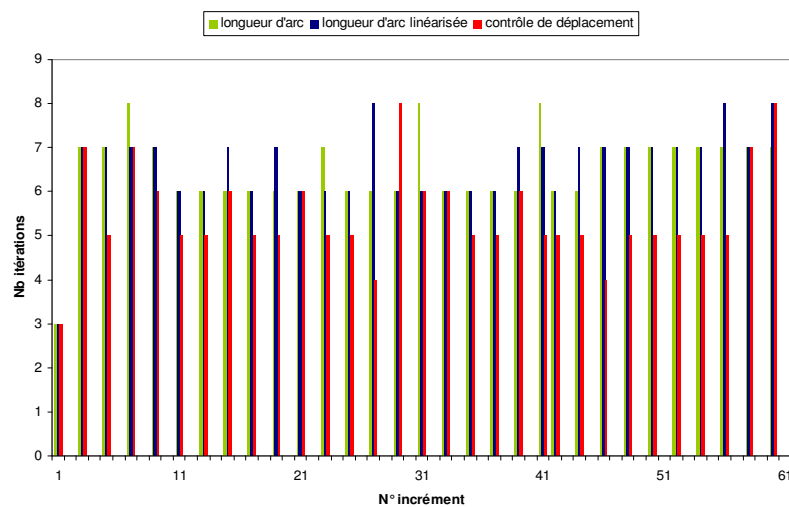


Figure 5.17 : Convergence des trois méthodes de continuation.

Même si la méthode de contrôle de déplacement semble être légèrement plus rapide à converger, elle présente néanmoins une limitation majeure. Reposant sur le contrôle du déplacement d'un seul nœud, généralement choisi au pôle de la tôle, cette méthode s'arrête à l'instant où le nœud de contrôle entre en contact avec l'outillage, or à cet instant la simulation de la mise en forme de la pièce est encore inachevée. Cette difficulté ne se pose pas pour les méthodes de longueur d'arc puisque ces méthodes contrôlent le déplacement de l'ensemble du maillage, d'où leur utilisation en cas de gonflage en matrice fermée.



## Références

- Batoz, L.; Dahatt, G. (1979), *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol.14, 1979, pp. 1262-1267.
- Bruce, W.; Forde, R.; Stiemer, F. (1987), *Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis*, Computers & Structures, vol.27, N. 5, 1987, pp. 625-630.
- Chevaugéon, N.; (2002), *Contribution à l'étude des membranes hyper-élastiques en grandes déformations*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes 2002.
- Crisfield, M. A. (1981), *A fast incremental/iterative solution procedure that handles Snap-through*, Computers & Structures, vol.13, pp 55-62 (1981).
- Crisfield, M. A. (1983), *An arc-length method including line searches and accelerations*, International Journal for Numerical methods in Engineering, vol.19, pp 1269-1289 (1983).
- Crisfield, M.A. (1991), *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials*. John Wiley & Sons, Chichester, 1991.
- Coste, F. (2004), *Modélisation thermomécanique tridimensionnelle par éléments finis de la coulée continue d'aciers*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.
- de Borst, R., *Computation of post-bifurcation and post-failure behaviour of strain-softening solids*. Computers & Structures, vol.25, pp. 221-224 (1987).
- Feng, Y. R.; Peric, D.; Owen, D.R.J. (1995), *Determination of travel directions in path-following methods*, Mathematical and Computer Modelling (1995), vol.21, Issue7, pp:43-59.
- Feng, Y. T.; Peric, D.; Owen, D.R.J. (1996), *A new criterion for the determination of initial loading parameter in arc-length methods*, Computers & Structures (1996), vol.58, No.3, pp : 479-485.
- Hashagen, F. (1999), *Numerical analysis of thin sheet metal forming and hydroforming with brick and prismatic finite elements*, rapport, Faculty of Aerospace engineering Delft University of Technology, July, 1999.
- Hama, T.; Asakwa, M.; Xing H. L.; Makinouchi, A. (2001), *Finite element analysis of tube hydroforming using static explicit method*, simulation of materials processing: Theory, methods and applications, Mori (ed) (2001).
- May, I. M.; Duan, Y. (1997), *A local arc-length procedure for strain softening*, Computers & structures, 1997 vol. 64, N°. 1-4, pp. 297-303.
- Meek, J. L.; Xue, Q. (1998), *A study on the instability problem for 3D frames*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 158 (1998), pp. 235-254.

Memon, B.A.; Su, X.Z. (2004), *Arc-length technique for nonlinear finite element analysis*, J. Zhejiang University Science, (2004), vol.5 (5), pp. 618-628.

Mocellin, K. (1999), *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud : Etude du contact et calcul multigrille*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-CEMEF, Sophia Antipolis, France.

Ramm, E. (1981), *Effect strategies for tracing the nonlinear response near limit points*, WUNDERLICH W ET AL "nonlinear finite element analysis in structural mechanics", 1981, Springer Berlin.

Riks, E. (1972), *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*, J. Appl. Mech., 39,(1972), pp. 1060-1066.

Riks, E. (1979), *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, Int. J. Solids Struct.,vol.7, (1979), pp. 529-551.

Riks, E.; Rankin, C.C. (1988), *Bordered equations in continuation methods: an improved solution technique*, National aerospace laboratory NLR, NLR MP 87057 U.

Schweizerhof, K.H.; Wiggers, P. (1986), *Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.,vol.59, (1986), pp. 261-279.

Souza Neto, E.A.; Feng, Y.T. (1999), *On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs'*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. (1999), vol.179, pp. 81-89.

Wagoner, W. (1988), *A simple method for the calculation of postcritical branches*, Eng. Comput.,vol.5, june (1988), pp. 103-109.

Wempner, G.A. (1971), *Discrete approximation related to nonlinear theories of solids*, Int. J. Solids. Struct.,vol.7, (1971), pp. 1581-1599.

Zhou, Z.; Murray, D. W. (1994), *An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures*, Computers & structures, 1994 vol. 55, N°.5, pp. 749-759.



## Chapitre 6

# Application à l'étude du procédé d'hydroformage

<b>Chapitre 6 .....</b>	<b>- 216 -</b>
6.1. Introduction.....	- 217 -
6.2. Etude du procédé d'hydroformage de flan doubles .....	- 217 -
6.2.1. Technologie .....	- 217 -
6.2.1.1. Système d'injection .....	- 218 -
6.2.1.2. Choix de la combinaison des matériaux .....	- 219 -
6.2.2. Simulation .....	- 221 -
6.3. Etude de l'hydroformage de flans simples .....	- 224 -
6.3.1. Etude d'un essai de gonflage circulaire .....	- 224 -
6.3.1.1. Influence du coefficient d'anisotropie $r$ .....	- 224 -
6.3.1.2. Influence du coefficient de sensibilité à la vitesse .....	- 226 -
6.3.2. Validation du critère de Force Maximum Modifié .....	- 227 -
6.3.2.1. Essais de gonflage en matrices elliptiques .....	- 227 -
6.3.2.2. Essais de gonflage annulaire .....	- 231 -
6.3.3. Gonflage d'une boîte de forme annulaire .....	- 234 -
6.3.4. Cas d'une pièce de carrosserie d'automobile .....	- 237 -
6.4. Hydroformage de tube.....	- 239 -
6.4.1. Etude du gonflage d'un tube de longueur finie .....	- 239 -
6.4.2. Etude de l'effet du chemin de déformation .....	- 242 -
6.5. Vers le soufflage de bouteille en polymère.....	- 244 -
Références .....	- 246 -

## 6.1. Introduction

Les outils d'analyse du comportement, d'étude de la striction ainsi que les différentes méthodes de simulation numérique développés dans les chapitres précédents sont maintenant utilisés pour la simulation du procédé d'hydroformage de flans et de tubes.

## 6.2. Etude du procédé d'hydroformage de flan doubles

### 6.2.1. Technologie

Au cours de ce procédé, deux plaques sont formées simultanément à l'intérieur d'une même matrice comportant une partie supérieure et une partie inférieure. Le procédé comporte deux phases principales ; une phase de gonflage libre, ou préformage, durant laquelle la majeure partie de la déformation prend lieu, suivie par une phase de calibrage servant à imprimer la forme finale de la matrice (Figure 6.1).

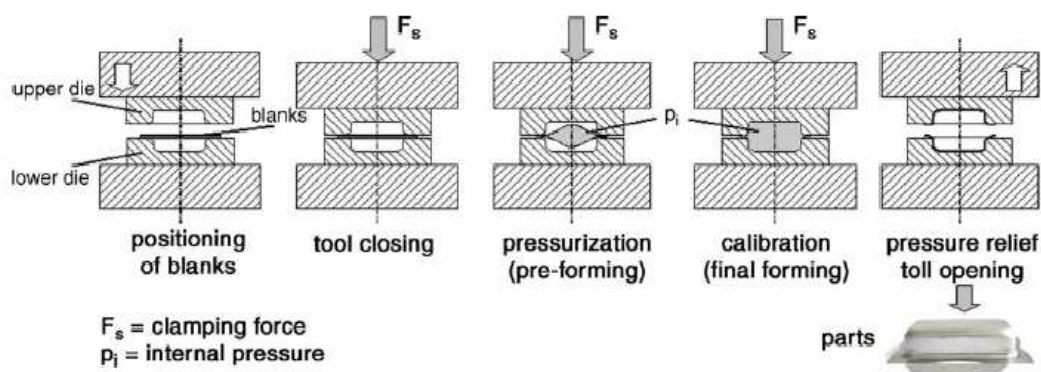


Figure 6.1: Procédé d'hydroformage de flans doubles [Groche et al, 2004].

### Phase de gonflage libre

Afin de garantir à la fois un découplage entre l'écoulement des deux tôles et assurer une étanchéité suffisante des parties sous pression, un système a été élaboré par Delfosud [Pasino et al, 2002]. Le principe consiste à maintenir la matrice inférieure et la matrice supérieure à une distance supérieure au cumul des épaisseurs des deux tôles de manière à garantir la liberté de glissement des deux tôles ; il est bien connu qu'un avalement de matière est de nature à améliorer la formabilité des tôles. Dans la pratique, des cales calibrées sont utilisées pour maintenir l'espacement inter-matriciel. L'effort exercé par les pistons de fermeture de la presse garanti l'immobilisation des deux matrices au cours du gonflage (Figure 6.2).

Concernant l'étanchéité du système, des joints à lèvres sont utilisés. Ils sont disposés selon le schéma indiqué sur la Figure 6.2 ; le joint extérieur permet une isolation globale, alors que les joints intérieurs, supérieur et inférieur, servent à maintenir le liquide entre les deux tôles gonflées. A noter que des trous



d'évacuation d'air sont prévus au niveau des matrices pour éviter une contre pression que peut exercer l'air emprisonné entre la tôle et la matrice.

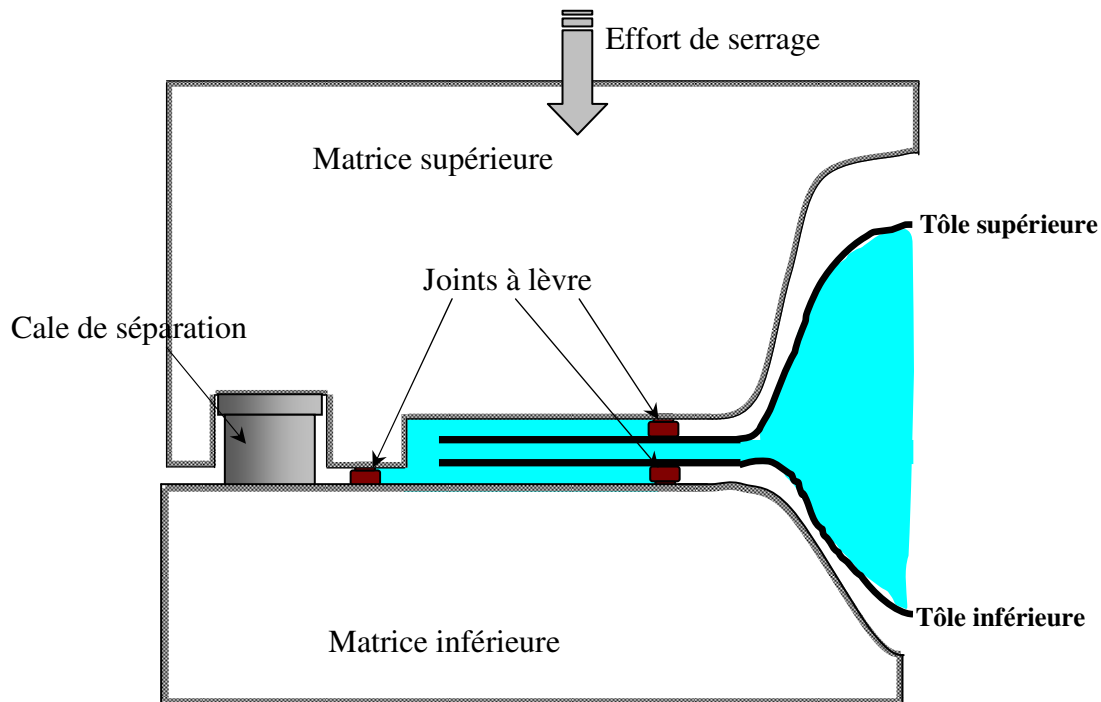


Figure 6.2 : Schéma de principe du procédé d'hydroformage de flans doubles.

### Phase de calibrage

A la fin de la phase de gonflage libre (qui correspond généralement à une pression de 70 bars pour des pièces en acier et 50 bars pour l'aluminium), les joints ne sont plus en mesure d'assurer l'étanchéité. Une deuxième phase du procédé est alors enclenchée: les cales de séparation sont enlevées, l'étanchéité est à présent assurée par le contact métallique entre les flans des deux tôles conjugué avec un effort de serrage suffisamment élevé. En raison de cet effort, très peu d'avalement est autorisé durant cette phase.

#### 6.2.1.1. Système d'injection

Outre la presse utilisée pour le maintien des matrices, le procédé d'hydroformage fait appel à une unité hydraulique qui comporte généralement une pompe et un surpresseur pour fournir de l'eau lubrifiée sous pression.

L'acheminement du liquide jusqu'aux tôles est assuré par un système d'injection. Diverses techniques sont utilisées dans l'industrie [Hein et al, 1999]. Dans le cas de ce projet, le remplissage est assuré par un système d'injection latéral formé d'un tube d'injection de forme cylindrique à section elliptique qui vient s'insérer entre les deux tôles (Figure 6.3).

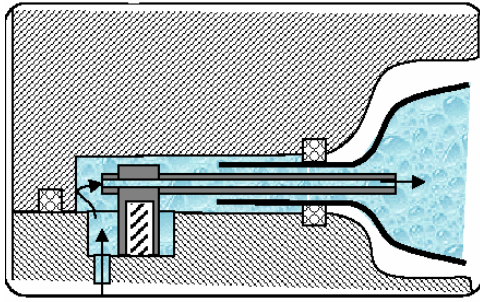


Figure 6.3 : système d'injection en hydroformage de flans doubles [Pasino et al, 2002]

#### 6.2.1.2. Choix de la combinaison des matériaux

La géométrie de l'outillage est un facteur déterminant dans la faisabilité de la pièce par le procédé envisagé. Les zones critiques en hydroformage de flan sont le plus souvent les zones ayant un grand ratio profondeur/largeur ou un faible rayon telles que les coins des pièces en forme de boîte. Dans ces zones, la rupture de la tôle est associée à un amincissement excessif. Ce problème est encore plus important en hydroformage de double flans puisqu'on travaille non plus avec un seul matériau mais avec deux ayant des propriétés et des géométries différentes. Il nous faut alors définir pour chaque couple de matériaux une fenêtre admissible pour le procédé.

Nous souhaitons disposer d'un outil simple d'utilisation permettant de faciliter le choix de la combinaison des matériaux pour une géométrie donnée. Cet outil doit tenir compte aussi bien de la pression que de la formabilité des matériaux.

Partant de la courbe d'évolution expérimentale de la pression en fonction de la hauteur  $P(h)$  pour un essai de gonflage circulaire, nous définissons le potentiel de déformation du matériau comme l'intégrale de la surface de la courbe de charge (Figure 6.4) :

$$S = \int_0^{h_{\max}} P(h) dh \quad 6.1$$

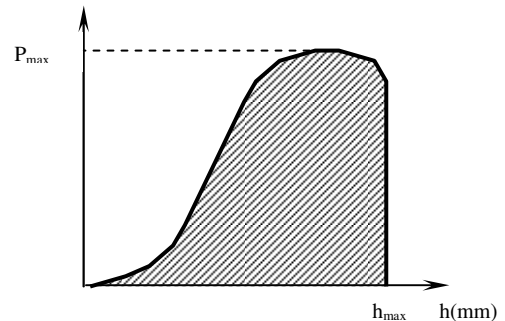


Figure 6.4 : Courbe pression-hauteur.

L'idée est de transformer cette surface en une surface équivalente de forme rectangulaire pour permettre la comparaison entre les différents matériaux. On définit alors la pression moyenne comme :

$$P_{\text{moy}} = S / h_{\max} \quad 6.2$$

D'une façon analogue nous introduisons une hauteur équivalente représentative de la hauteur moyenne au cours de l'essai :

$$h_{\text{moy}} = S / P_{\max} \quad 6.3$$

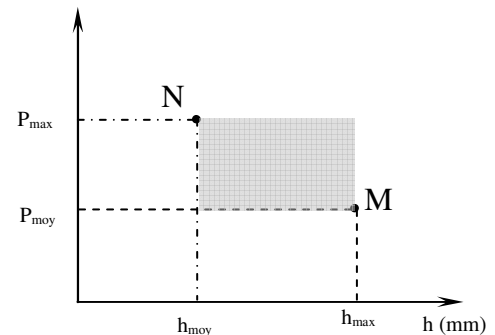


Figure 6.5 : Surface équivalente.

De cette façon, nous avons introduit un premier point M ( $h_{max}, P_{moy}$ ) et un deuxième point N ( $h_{moy}, P_{max}$ ). Représentés sur le diagramme pression-hauteur, les deux points correspondent au sommet d'une surface rectangulaire équivalente à la surface  $S$ .

La Figure 6.6 regroupe les résultats obtenus pour différentes nuances d'acier et d'aluminium. La comparaison entre la position relative et la forme de deux surfaces données est un indicateur du degré de compatibilité de ces deux matériaux. En effet, pour assurer une homogénéité de la déformation, il est nécessaire que les pressions de gonflage des deux matériaux soient comparables ; une forte différence peut entraîner la rupture prématurée d'un matériau alors que la déformation du deuxième est encore inachevée.

Outre la visualisation de la pression, ce diagramme permet la visualisation de la ductilité des matériaux par l'indication des hauteurs moyenne et maximale atteignables par le matériau. Ceci peut être utile pour attribuer le matériau le plus ductile aux géométries de fortes profondeurs.

La question du choix des matériaux en hydroformage de flans doubles a été abordée d'une manière analytique par [Geiger et al, 2002]. Ainsi, un facteur d'hydroformage (HMF) est établi. Il correspond à la pression nécessaire pour le gonflage d'une tôle en matrice circulaire jusqu'à une hauteur égale à la moitié du rayon de la matrice. Ce paramètre est aisément calculé à partir de la relation analytique entre la pression et la hauteur de gonflage (2. 92). Il constitue un critère de sélection : les matériaux choisis doivent avoir des paramètres comparables pour assurer une homogénéité des déformations particulièrement durant la phase de calibrage.

A l'examen des Figures 6-6 et 6-7, on retrouve la même classification en terme de niveau de pression. Ainsi, le DP450 d'épaisseur 1.8mm se trouve en haut de l'échelle, alors que l'aluminium 5754 1mm se trouve en bas de celle-ci.

A la différence de l'approche qu'on propose, le facteur d'hydroformage est entièrement déterminé par les paramètres de traction, ce qui constitue un avantage en terme de facilité d'utilisation. En revanche, cette classification ne fournit aucune indication sur la formabilité des matériaux, paramètre que le diagramme de la Figure 6.6 est en mesure d'indiquer.

L'analyse du diagramme permet de dégager quelques combinaisons de matériaux prometteuses :

-Dans le cas de pièces à très grande rigidité : DP450 1.8mm / TRIP800 1mm.

-Pièces à rigidité moyenne : DC04 1.5mm ou DC04 1.8mm/DP450 1mm. ; 5754 1.8mm/ DC04 1mm.

Les essais réalisés sur des pièces semi-industrielles semblent montrer la supériorité du DC04 en terme de formabilité, résultat auquel on pouvait s'attendre vu la ductilité de ce matériau. La combinaison entre le DC04 et le DP450 a également montré des résultats très intéressants. En revanche, le résultat de la combinaison entre l'acier et l'aluminium est moins satisfaisant.

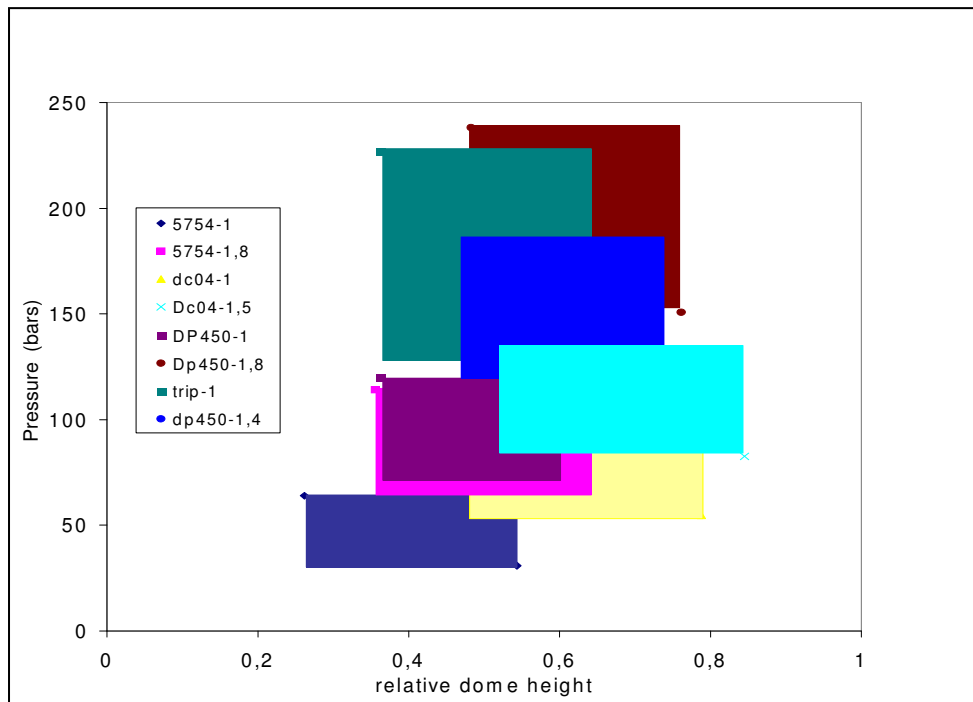


Figure 6.6 : Diagramme d'évaluation de la formabilité des tôles.

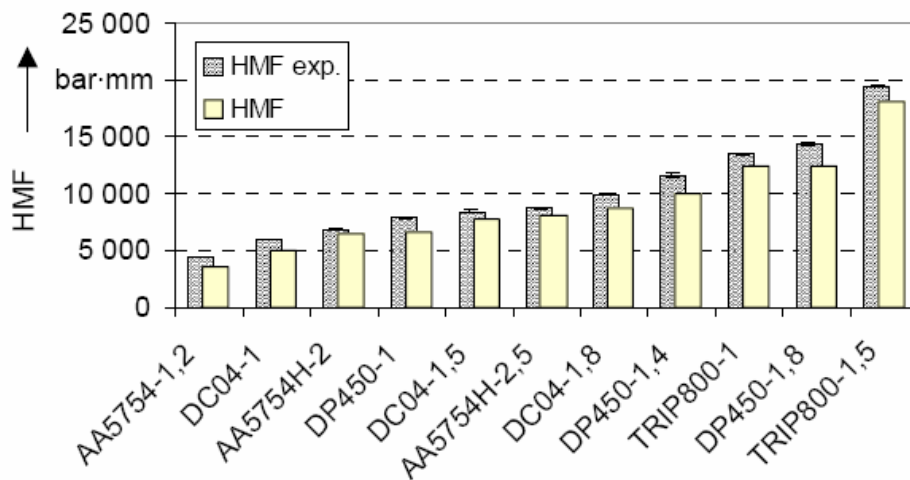


Figure 6.7 : Le facteur d'hydroformage (**H**ydroforming **M**aterial **F**actor) [Geiger et al, 2002].

### 6.2.2. Simulation

La simulation de la mise en forme par hydroformage de flans doubles peut être envisagée en adoptant une simulation complète du procédé. Dans ce cas, un code de calcul multi-domaines est indispensable pour pouvoir simuler la déformation des deux tôles et tenir compte des diverses interactions.

Bien entendu une telle approche est consistante avec les conditions réelles de l'essai, mais au prix d'un temps de calcul généralement onéreux. En effet, compte tenu de l'utilisation d'un code de calcul 3D volumique et implicite, il est naturel de se préoccuper du temps de calcul lorsqu'on sait que le coût de

résolution d'un système linéaire par un solveur itératif est proportionnel à  $(ddl^{3/2})^{11}$ . Ceci veut dire qu'en admettant que les deux tôles aient le même nombre de  $ddl$ , le temps de résolution du problème complet est alors 2.83 fois le temps nécessaire à la résolution d'une seule tôle. De ce fait, l'idée est de scinder la simulation complète de l'hydroformage de flans doubles en deux simulations de flan simple pour ainsi réduire le temps total à 2 fois le temps d'une simulation simple.

Cette décomposition est envisageable à condition que les deux nouveaux problèmes simplifiés tiennent compte des interactions survenant dans le problème complet. La technologie mise en œuvre dans le cas du procédé d'hydroformage de flans doubles se prête bien à cette décomposition :

**Gonflage libre** : durant cette phase, un jeu est maintenu entre les deux tôles. Dans ce cas, le problème peut être ramené à deux problèmes de gonflage simple ayant chacun un jeu égal à la moitié du jeu du problème complet. Les conditions de frottement entre tôle-tôle sont reproduites au niveau des contacts entre la tôle et la matrice de substitution.

Nous avons mené des simulations multi-matériaux en 2D axisymétrique (Figure 6.8). Différentes combinaisons de matériaux ont été testées. Le jeu entre matrices a fait également l'objet d'une étude de sensibilité [Sleiniute, 2004]. Comme le coût de calcul en 2D multi-matériaux reste abordable, ces simulations nous ont permis de comparer l'écoulement entre matrice double et matrice simple équivalente et vérifier la validité de la démarche de décomposition pour l'extrapoler aux écoulements 3D.

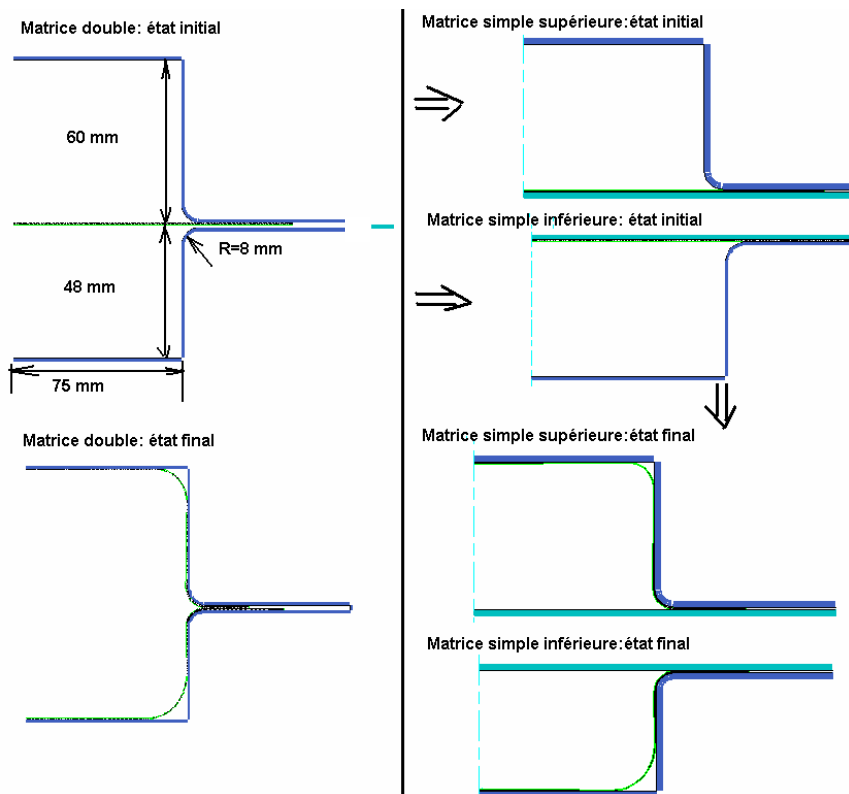


Figure 6.8 : Décomposition de la simulation d'un essai de gonflage double en deux essais simples.

<sup>11</sup> ddl : nombre de degrés de libertés.

Les résultats ont montré que l'écoulement en matrice simple reproduit bien l'écoulement en matrice double tant que les deux tôles n'entrent pas en contact. A titre d'exemple, nous allons considérer la combinaison DC04/DP450 en utilisant la tôle DC04 pour la matrice supérieure et la tôle en DP450 pour la matrice inférieure. Les différentes conditions de frottement sont résumées au Tableau 6.1. Le jeu entre matrice double est de 0.01 mm, en matrice simple le jeu est de 0.005mm. La figure 6.9 illustre l'avalement des différentes tôles en configuration de matrice simple et matrice double. Les changements brusques au niveau des différentes courbes correspondent à des entrées en contact au niveau des flans. On observe ainsi, une très bonne correspondance entre l'avalement en matrice simple et double dans les premiers stades de l'écoulement et avant tout contact (jusqu'à 40s). Ensuite, le flan de la tôle DC04 entre en contact en matrice simple avant qu'un contact ait lieu en matrice double. A l'inverse, l'entrée en contact du flan DP450 en matrice simple apparaît plus tard qu'en matrice double. Cet exemple illustre la difficulté de reproduire en matrice simple, l'instant d'apparition du contact entre tôles doubles. En effet, comme le comportement des deux tôles est différent, la moins rigide des deux tôles se déforme plus rapidement avec un avalement sous serre-flan plus important. Profitant du jeu en présence, celle-ci va continuer à s'avaler en s'épaississant au niveau du flan et ce jusqu'à entrer en contact avec la deuxième tôle (la plus rigide), cette dernière ayant subi un léger avalement et donc peu d'épaississement. Les tôles entrent en contact à l'instant où le jeu inter-matricielle est rattrapé par le cumul de l'épaississement des deux flans. Cependant, ce cumul n'est évidemment pas partagé équitablement entre les deux tôles et il dépend fortement des propriétés mécaniques de celles-ci.

Tableau 6-1 : Coefficients de frottement

	$\mu$ (tôle/matrice)	$\mu$ (dc04/dp450)
<b>DC04</b>	0,076	0,188
<b>DP450</b>	0,085	0,188

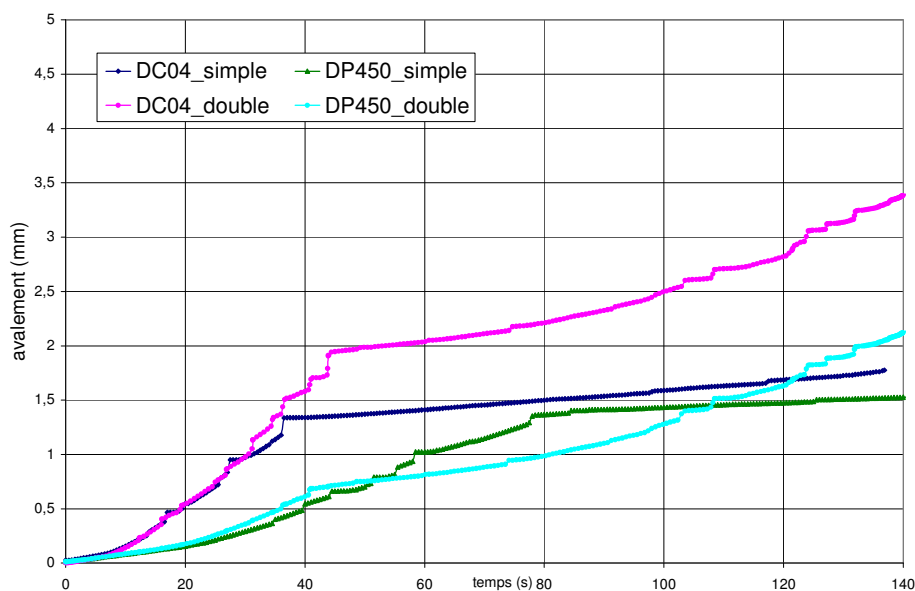


Figure 6.9 : Décomposition de la simulation d'un essai de gonflage double en deux essais simples.

L'hypothèse de partager le jeu entre les deux matrices simples montre donc ses limites. En toute rigueur, le jeu de chacune des matrices simple doit être calculé de manière à reproduire l'instant d'entrée en contact. Ce dernier n'étant pas connu a priori.

On voit que le domaine de validité de la simplification en matrices simples se limite donc aux configurations pour lesquelles un jeu suffisant est présent durant toute la phase de gonflage.

**Calibrage** : pendant cette phase, les pressions de contact sont suffisamment élevées pour que très peu d'avalement et donc d'interaction entre tôles soient observés. Dans ce cas, il est possible de transformer le problème en deux problèmes simples en veillant à ce que les conditions de contact soient bien reproduites.

Dans les conditions mentionnées, l'étude du procédé d'hydroformage de flans doubles peut se ramener à l'étude d'un procédé d'hydroformage de flan simple.

### ***6.3. Etude de l'hydroformage de flans simples***

#### ***6.3.1. Etude d'un essai de gonflage circulaire***

L'étude de l'essai de gonflage circulaire, présentée au chapitre2 (§ 4.3.1), a mis en évidence deux modèles analytiques décrivant l'évolution de la courbe pression en fonction de la hauteur. Le modèle en calotte prévoit que le coefficient d'anisotropie influe sur le pic de pression mais n'a aucune influence sur la hauteur correspondant à ce pic. Le deuxième modèle, prévoit une influence du coefficient d'anisotropie aussi bien sur le pic de pression que sur la hauteur.

Afin de vérifier l'effet de l'anisotropie, nous allons considérer la simulation du test de gonflage circulaire avec une anisotropie transverse ( $r_0 = r_{45} = r_{90} = r$ ). Le matériau utilisé suit une loi d'écroutissage de type puissance.

Etant donné l'axisymétrie de l'anisotropie normale, on considère uniquement un 1/18 du maillage complet (cf. chapitre5 § 5.3).

##### ***6.3.1.1. Influence du coefficient d'anisotropie $r$***

Les méthodes de continuation présentées au chapitre 5 sont ici très utiles pour détecter le pic de pression. En effet, la méthode de pression imposée est susceptible de diverger au voisinage du pic de pression et ne peut donc être utilisée pour une détection précise. En revanche, les méthodes de continuation offrent la possibilité de dépasser le pic de pression et de bien identifier ce dernier.

A cet effet, nous avons commencé par simuler les essais de gonflage circulaire en utilisant la méthode de contrôle de déplacement. Ceci nous a permis de tracer l'évolution de la courbe pression-hauteur en fonction de l'anisotropie pour des paramètres  $r$  variant entre 0.5 et 1.2. Pour des coefficients plus grands, on s'est aperçu que l'algorithme n'arrivait pas à dépasser le pic de pression et ce malgré la réduction de la longueur d'arc et la technique de reprise de calcul utilisé pour faciliter la convergence (cf. 5.4.4.3). C'est pourquoi la méthode de longueur d'arc cylindrique a été utilisée et a ainsi permis de dépasser le pic de pression en variant le coefficient  $r$  sur une plage entre 0.5 et 2.5. Les paramètres de la simulation sont rapportés dans le tableau 6-2.

Sur la Figure 6.10 (déjà présentée au chapitre 5, figure 5.17), on résume l'influence du coefficient  $r$  sur les courbes pression-hauteur. On note sur la Figure 6.11 que le coefficient d'anisotropie influe sur la pression maximale de gonflage, cependant la hauteur et l'épaisseur correspondantes varient très peu.

Sur la Figure 6.12 sont reportées les résultats des prédictions du CFMM. On note que la striction apparaît au même moment indépendamment du coefficient d'anisotropie. Ce résultat est différent des prédictions analytiques du CFMM avec un critère de Hill48 qui prévoit une forte influence de l'anisotropie sur l'apparition de la striction.

Tableau 6-2 : Paramètres de la simulation

Module de Young	200 GPa
Coefficient de Poisson	0.3
$n$	0.2
$m$	0.0
épaisseur	1.0 mm
Pression de référence	100 bars
Temps de référence	300 s
Longueur d'arc	5 mm

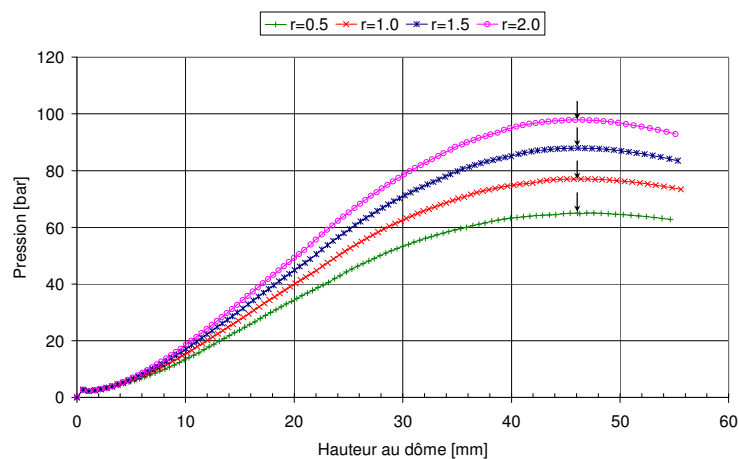


Figure 6.10 : Effet du coefficient d'anisotropie sur la courbe pression en fonction de la hauteur au pôle.

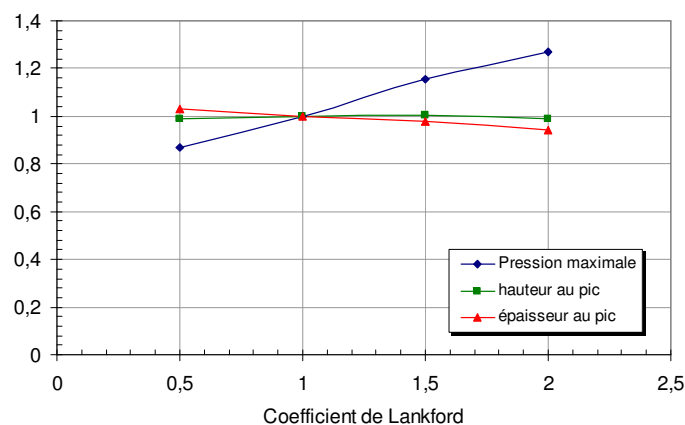


Figure 6.11 : Effet du coefficient d'anisotropie sur la hauteur, l'épaisseur et la pression au pic.



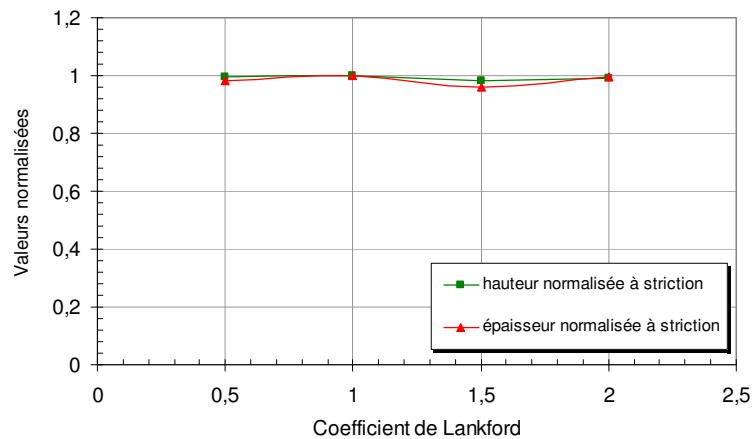


Figure 6.12 : Effet du coefficient d'anisotropie sur la hauteur, l'épaisseur à striction.

### 6.3.1.2. *Influence du coefficient de sensibilité à la vitesse*

La sensibilité à la vitesse peut jouer un rôle de stabilisateur lorsqu'une localisation de la déformation commence à apparaître au niveau de la pièce. Cet effet a été largement étudié dans la littérature pour des chargements en rétreint et plus particulièrement pour des essais de traction uni-axiale. En revanche, très peu de travaux ont porté sur l'effet de la sensibilité à la vitesse en expansion biaxiale. A la différence des déformations en rétreint pour lesquelles la localisation de la déformation (striction diffuse) se manifeste par un rétrécissement latéral de l'éprouvette, en expansion, la liberté du déplacement latéral étant bloquée, la manifestation de la striction diffuse devient plus difficile à déceler.

Etant donné que le comportement de la tôle devient viscoplastique, la réponse de celle-ci devient également sensible à la vitesse de chargement. On considère toujours le même essai avec une vitesse de 2.5 bars/s. La Figure 6.13 montre que l'accroissement du paramètre  $m$  entraîne une réduction de la pression de gonflage. Ceci est dû à la définition de la contrainte d'écoulement ( $\bar{\sigma} = K \cdot \bar{\epsilon}^n \cdot \dot{\bar{\epsilon}}^m$ ) qui décroît avec l'accroissement de  $m$ .

On résume sur la Figure 6.14 l'effet de la vitesse de chargement et on note une augmentation de la courbe de charge avec l'accroissement de la vitesse de charge. En revanche la hauteur au pic de pression ne semble pas dépendre de la vitesse de chargement.

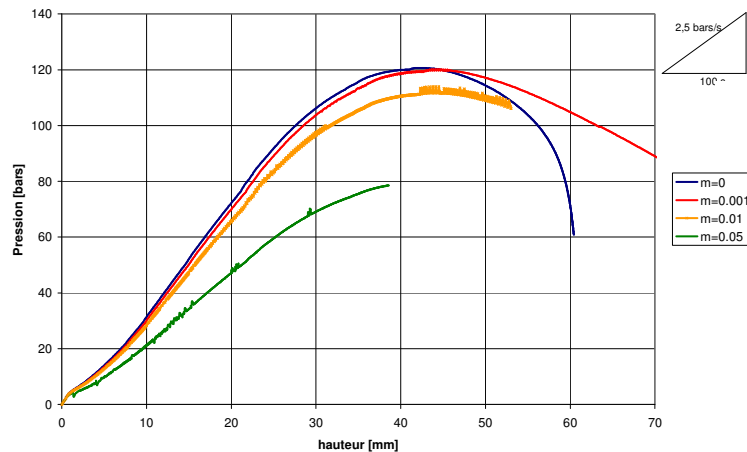


Figure 6.13 : Effet du coefficient de sensibilité à la vitesse sur la courbe pression en fonction de la hauteur au pôle.

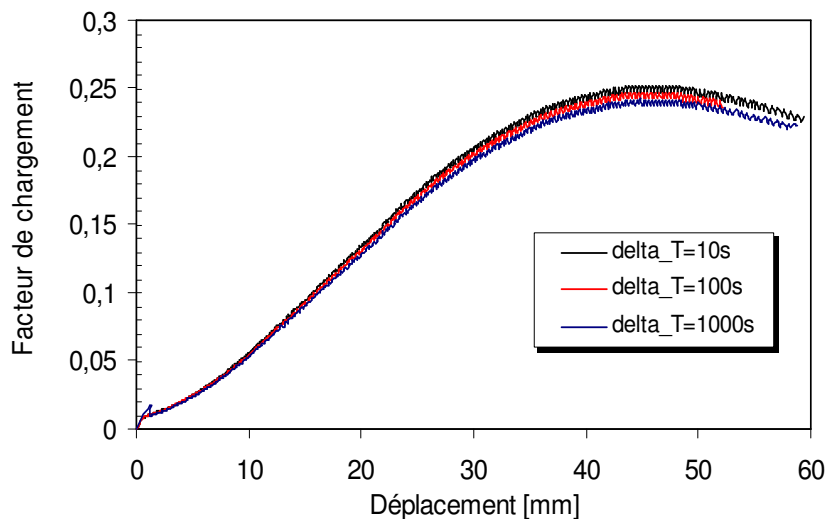


Figure 6.14: Effet de la vitesse de chargement sur la courbe pression en fonction de la hauteur au pôle.

## 6.3.2. Validation du critère de Force Maximum Modifié

### 6.3.2.1. Essais de gonflage en matrices elliptiques

Nous reprenons dans ce paragraphe l'étude des essais de gonflage elliptiques qui ont servi à la détermination expérimentale des courbes limites de formage. Nous rappelons dans le Tableau 6-3 les dimensions des trois matrices.

Les essais de gonflage ont été ensuite simulés en utilisant Forge3® standard qui repose sur une approche de contrôle de pression et une intégration implicite. Pour ces simulations, le pas de temps a été choisi suffisamment faible (0.002 de déformation par incrément) afin de garantir les conditions les plus favorables à la convergence de la méthode. Ces mêmes essais ont été également simulés en utilisant la méthode de continuation par longueur d'arc cylindrique linéarisée, avec une longueur d'arc de 5mm (soit un déplacement en moyenne de 0.25mm par incrément au niveau du pôle).

Concernant les paramètres du matériau nous avons utilisé la loi d'écrouissage issue des essais de gonflage et dont les paramètres sont donnés au Tableau 2-5. Le critère de Hill48 est également utilisé avec les paramètres suivants ( $F = 0.249$ ,  $G = 0.348$ ,  $H = 0.651$ ,  $L = M = N = 1.094$ ) déterminés à partir des coefficients de Lankford.

Les courbes d'évolution de la pression en fonction de la hauteur, rapportées sur la Figure 6.15, montrent un très bon accord entre les simulations numériques et les mesures expérimentales avec, toutefois, une légère sur-estimation de la courbe de charge pour l'essai elliptique N2. On peut également noter sur ces mêmes figures les limites de la méthode de contrôle d'effort qui n'est pas en mesure de simuler la totalité de la courbe. En effet, les points indiqués sur les courbes par ( $\uparrow$ ) correspondent aux points où la méthode diverge. La divergence de la méthode se manifeste par une non convergence de l'algorithme (Figure 6.16-b) ou bien par la prédiction d'une courbe non physique (Figure 6.16-a). En revanche, la méthode de la longueur d'arc permet la simulation de la totalité de la courbe, et ce jusqu'à atteindre la striction prédite par le CFMM (indiqué par ( $\downarrow$ ) sur les courbes). A noter par ailleurs, que pour la matrice elliptique N2, la méthode de contrôle de pression est suffisante pour simuler l'essai étant donné que la striction apparaît avant le pic de pression.

En terme de chemin de déformation, la Figure 6.15 montre de bons accords entre les simulations et les mesures expérimentales, exception pour la matrice elliptique N2 où certains écarts sont à noter. Ces écarts semblent être dus à l'effet de la vitesse de déformation. En effet, nous avons effectué quelques simulations en faisant varier le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation. Les résultats ont montré que l'essai elliptique N2 présentait une sensibilité importante par rapport aux deux autres géométries. Une identification précise du coefficient de sensibilité à la vitesse pourrait améliorer les résultats de la prédiction.

Nous présentons sur la Figure 6.18 une comparaison entre le profil des épaisseurs mesurées et simulées pour l'essai de gonflage circulaire, on remarque une assez bonne correspondance.

L'ensemble des résultats présentés pour le cas du DC04 tend à montrer que le comportement de ce matériau est assez bien décrit par un critère de Hill48.

Nous présentons sur la Figure 6.19 une synthèse des simulations numériques effectuées sur tous les matériaux. On peut noter que le CFMM est en mesure de retrouver les tendances expérimentales avec une légère surestimation.

Tableau 6-3 : Dimensions des matrices de gonflage elliptique.

	circulaire	Elliptique N1	Elliptique N2
Grand axe 2a	125 mm	125 mm	125 mm
Petit axe 2b	125 mm	83 mm	42 mm
Rapport d'axe a/b	1.0	1.5	3.0

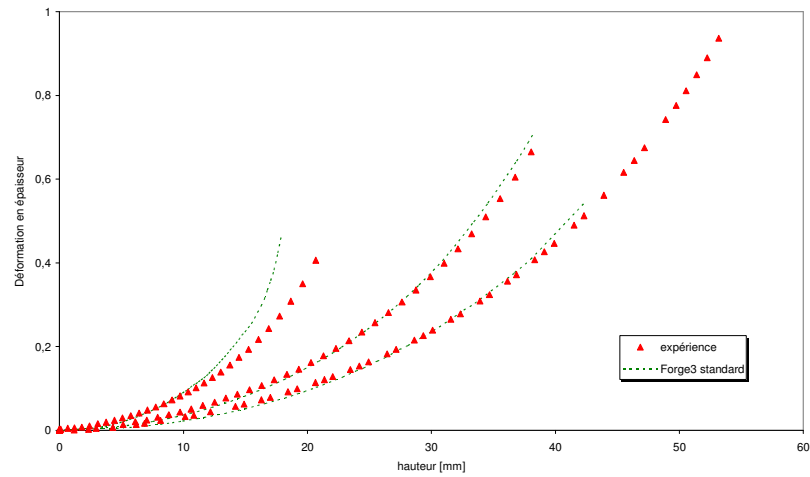


Figure 6.15 : Evolution du chemin de déformation pour les trois essais de gonflage (DC04).

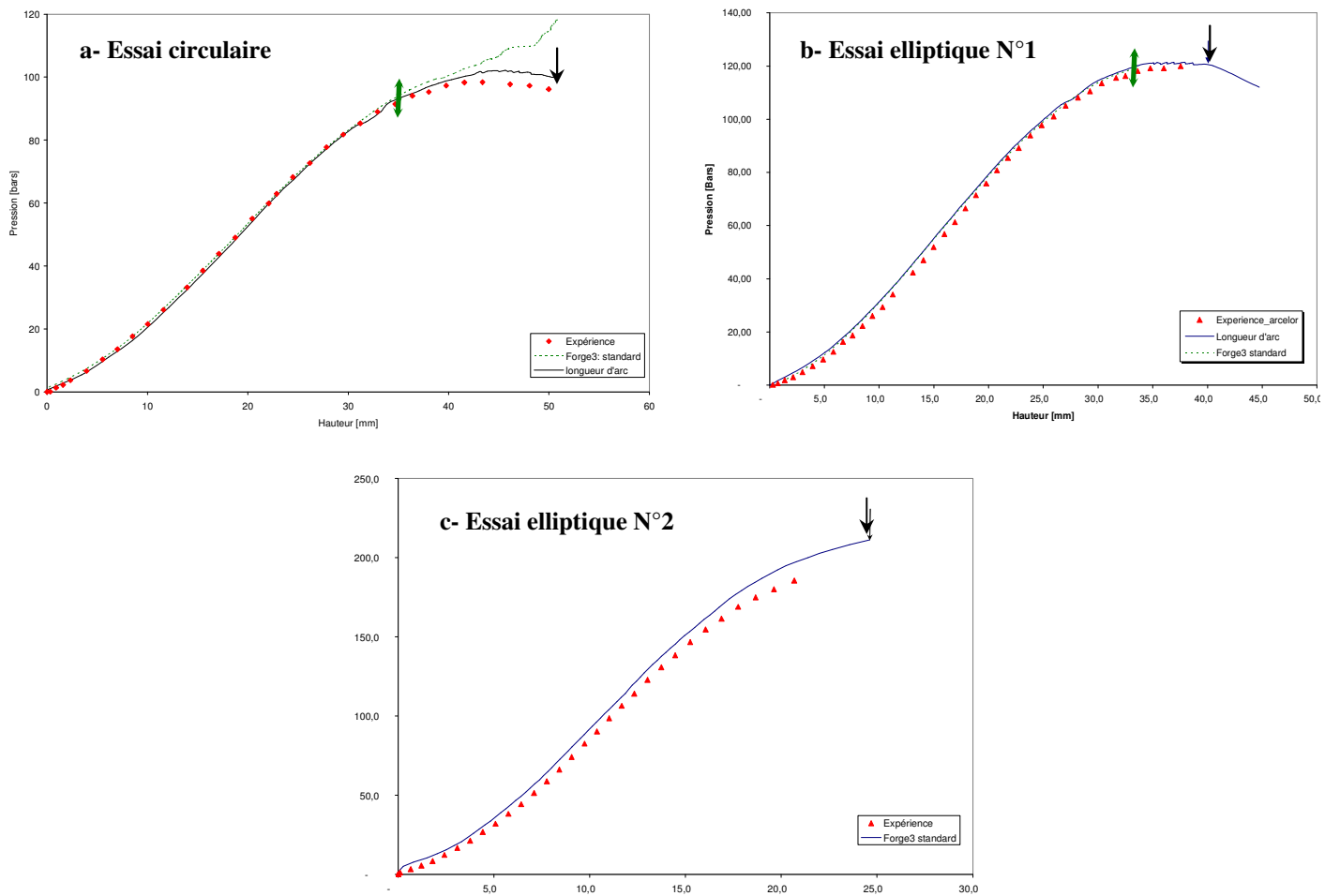


Figure 6.16 : Courbes d'évolution de la pression en fonction de la hauteur de gonflage.



Figure 6.17 : Prédiction de la striction :  
En haut prédiction du critère de FMM / En bas photos des éprouvette.

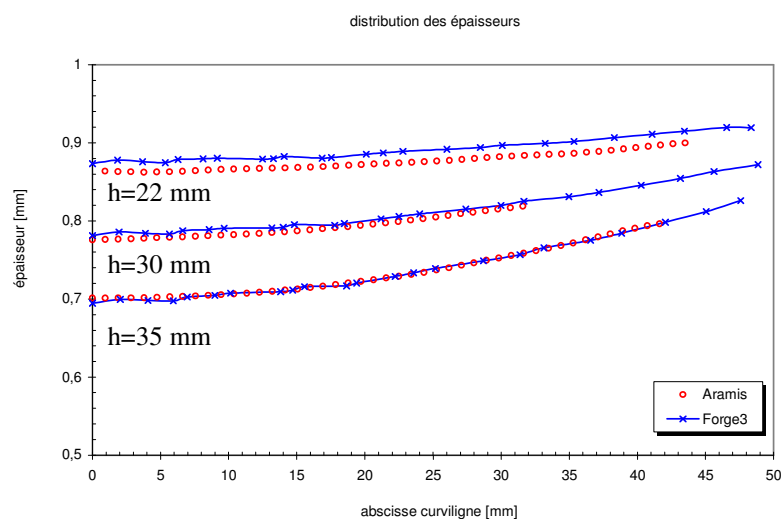


Figure 6.18 : Profil des épaisseurs.

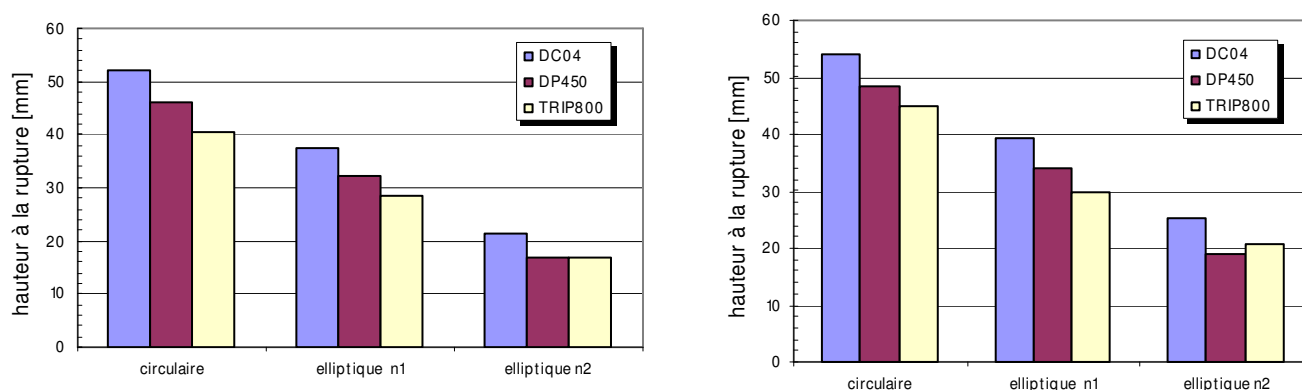


Figure 6.19 : Comparaison entre les hauteurs à striction : expérience (à gauche), simulation (à droite).

### 6.3.2.2. Essais de gonflage annulaire

#### Motivation

En ayant recours au procédé d'hydroformage pour la mise en forme de pièces industrielles présentant des géométries assez complexes, les zones de déformation critiques sont le plus souvent situées au niveau des coins de matrice. Afin d'étudier ce problème, le laboratoire LFT (partenaire du projet) a mis en place un essai de gonflage annulaire permettant le gonflage axisymétrique d'un disque initialement percé d'un trou au centre. Bien que ce test soit relativement simple, il permet toutefois de reproduire les modes de rupture qu'on peut observer sur des pièces de géométrie assez complexes (Figure 6.20).



Figure 6.20 : Les modes de rupture apparaissant sur une pièce industrielle, sont reproduits par des essais de gonflage annulaires.

Les essais de gonflage ont été menés chez LFT sur une presse 3 axes. Un schéma descriptif de la presse utilisée est présenté sur la Figure 6.21-a. L'écoulement de la tôle est contrôlé par l'action de deux serre-flans ; un premier situé à l'extérieur de la tôle (l'effort correspondant est  $F_e$ ), et un deuxième servant au contrôle de l'avalement de matière à partir du centre de la tôle (l'effort correspondant est  $F_i$ ). Un système d'injection situé au dessus de la tôle assure le gonflage de cette dernière.

Les paramètres d'entrée de l'essai sont : les efforts des deux serre-flans, le diamètre intérieur  $D_i$  et le diamètre extérieur  $D_e$ . En sortie, on observe la formabilité de l'éprouvette en terme de pression maximale et en terme de la hauteur maximale atteinte avant rupture.

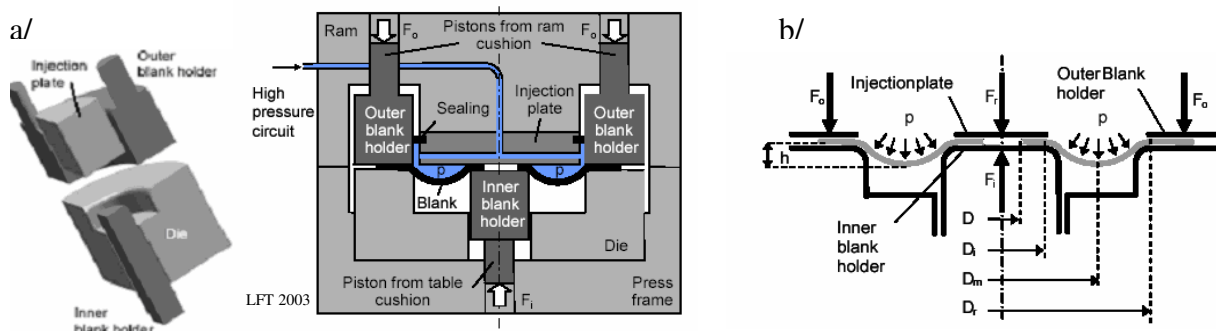


Figure 6.21 : Essai de gonflage annulaire  
a/ Dispositif expérimental. b/ paramètres de l'essai.

### **Simulation de l'essai**

Le gonflage en matrice axisymétrique annulaire conduit inévitablement à la striction puis à la rupture de la pièce. Bien qu'inévitable, l'apparition de la striction peut toutefois être retardée moyennant un choix judicieux des paramètres du procédé.

Dans le cas présent, une amélioration de la formabilité peut être entreprise par le contrôle de l'avalement de matière provenant des flans intérieur et extérieur de la tôle. Mais avant ceci, considérons le potentiel de déformation propre au matériau et inhérent à ses propriétés mécaniques uniquement (Tableau 6-4). Dans ces conditions, l'essai de gonflage est simulé avec des conditions de contact bilatéral collant sur les deux flans pour empêcher tout avalement. Les prédictions du Critère de Force Maximum Modifié indiquent une striction située au voisinage du rayon d'entrée de matrice intérieur (Figure 6.22). On remarque, également, que le critère est en mesure d'identifier les premières étapes de la phase de localisation de la déformation en épaisseur ( $H=11.48$  mm). Celle-ci se développe très rapidement après striction ( $\sim 1$  mm d'intervalle).

Tableau 6-4 : Paramètres rhéologique du matériau

Module de Young	200 GPa
Coefficient de Poisson	0.3
$\bar{\sigma} = K(\bar{\epsilon}_0 + \bar{\epsilon})^n$	$552(0.0078 + \bar{\epsilon})^{0.254}$
$\bar{r}$	1.57
épaisseur	1.5 mm

A noter que le critère indique aussi des localisations au niveau du rayon d'entrée de matrice extérieur. En revanche, ces indications ne semblent pas évoluer au cours du temps. En règle générale, on a pu noter que lorsqu'une striction effective apparaît, elle a tendance à se propager, c'est le cas par exemple au niveau du rayon intérieur.

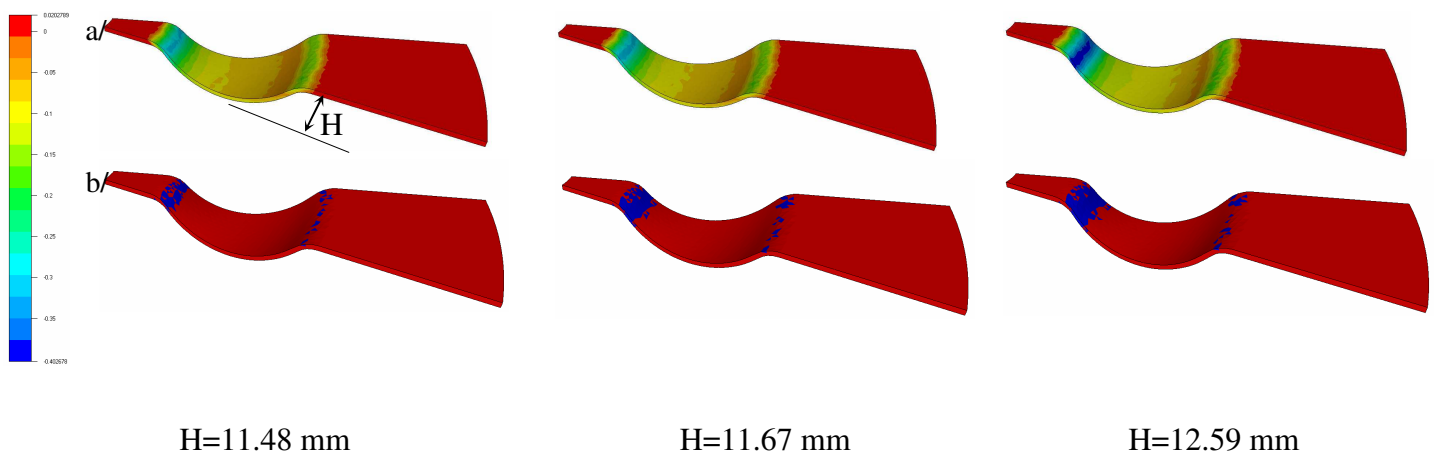


Figure 6.22 : Apparition et évolution de la striction.  
a/ carte de distribution de la déformation en épaisseur. b/ prédiction de la striction.

Comme on a pu le constater, l'amincissement se développe dans la partie intérieure de la tôle. Pour repousser la formation de cette striction, un apport de matière, principalement en provenance du flan intérieur situé à proximité de la zone critique, pourrait donc compenser la localisation de la déformation. Cet apport de matière peut être contrôlé via l'effort du serre-flan intérieur. On choisit donc de le faire varier tout en maintenant l'effort extérieur constant à 440 kN.

On peut observer sur la Figure 6.23 que le critère de striction reproduit assez bien l'influence de l'effort du serre-flan sur la formabilité de la tôle.

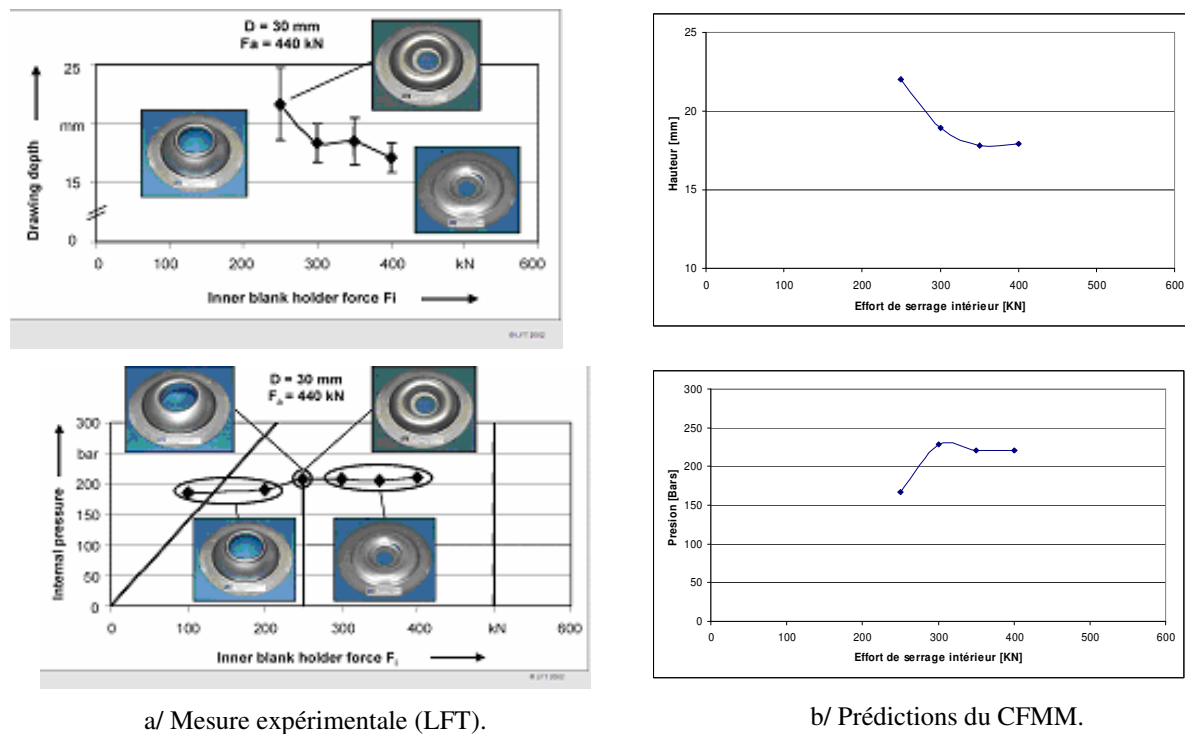


Figure 6.23 : Effet de l'effort de serrage intérieur sur la formabilité de la tôle.

Cet essai de gonflage a été simulé avec la méthode standard et avec la méthode de la longueur d'arc. La courbe d'évolution de la pression de gonflage en fonction de la hauteur (Figure 6.24) montre une parfaite correspondance entre les deux méthodes dans la phase stable de gonflage. On note ensuite l'aptitude de la méthode de la longueur d'arc à simuler la phase instable de l'essai.

Pour cet essai, et à la différence des essais de gonflages libres (§ 3.1), la striction identifiée par le CFMM se manifeste vers la fin de la phase stable et avant d'atteindre le pic de pression (Figure 6.24). Le mode de déformation au niveau de la zone de striction est un mode de déformation plane. Il semble donc que la méthode standard de contrôle d'effort est suffisante pour simuler ce mode de déformation.



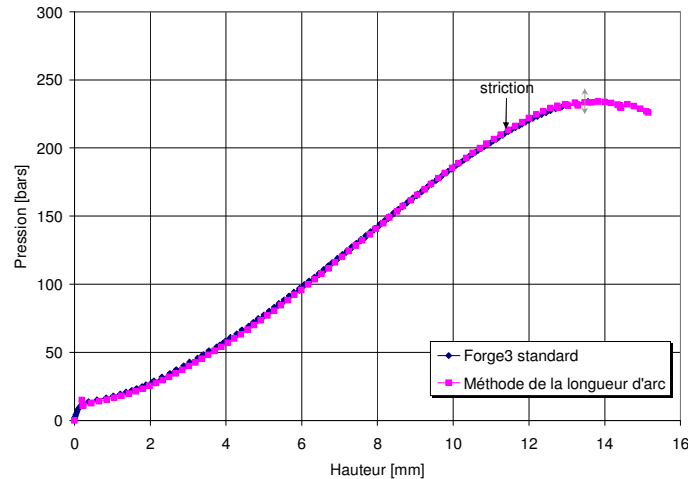


Figure 6.24 : Courbe d'évolution de la pression en fonction de la hauteur.  
(↓) apparition de la striction, (↗) pic de pression.

### 6.3.3. Gonflage d'une boîte de forme annulaire

Cet essai a été proposé par le laboratoire LFT afin d'étudier l'écoulement de la matière dans une géométrie annulaire de forme rectangulaire (Figure 6.25). Deux serre-flans peuvent être utilisés pour le contrôle de l'avalement : un premier contrôle l'avalement du flan intérieur et un deuxième pour l'avalement du flan extérieur.

Le matériau utilisée est un DC04 d'épaisseur 1.5 mm. Les simulations sont effectuées avec un critère de von Mises et une loi d'écrouissage de type Krupkowski  $\bar{\sigma} = 552(0.0078 + \bar{\epsilon})^{0.2543} \dot{\bar{\epsilon}}^{0.01}$ .

Nous considérons le potentiel de déformation du matériau en l'absence de tout avalement de matière sur les deux flans intérieur et extérieur. L'essai est donc simulé avec un contact bilatéral collant sur les deux flans. L'objectif étant de valider la méthode de la longueur d'arc sur une géométrie plus évoluée que celles testées jusqu'à présent. La longueur de contrôle utilisée est de 10mm.

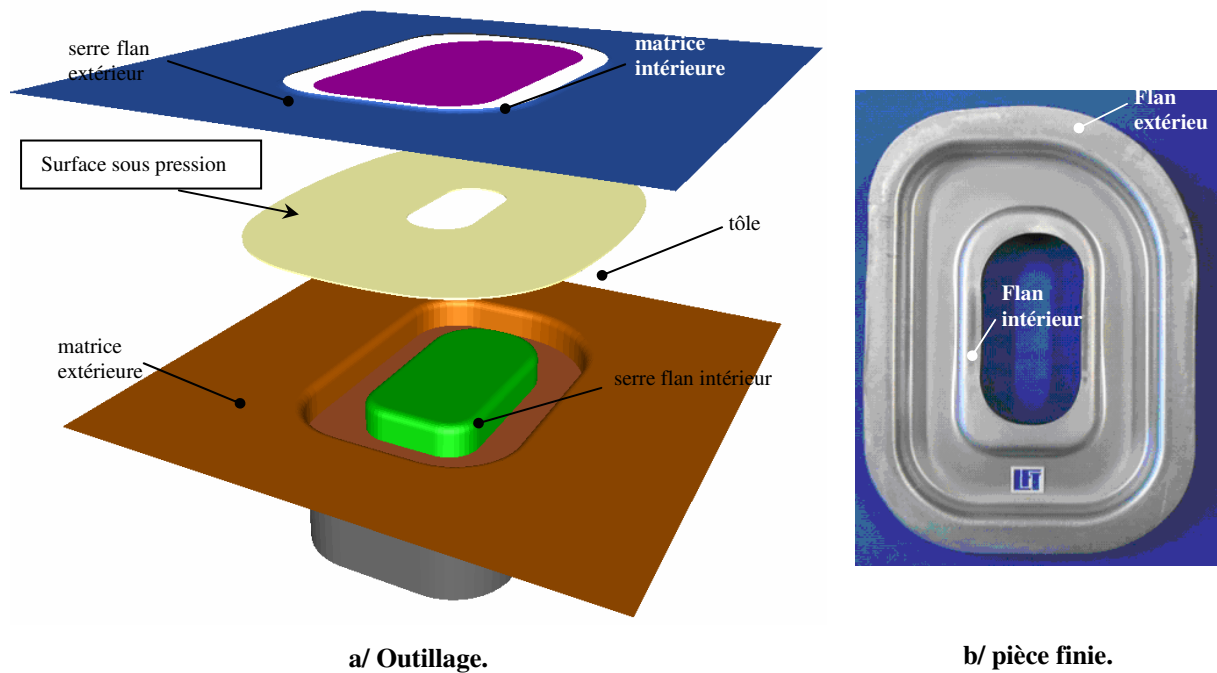


Figure 6.25 : Simulation de l'hydroformage d'un flan annulaire.

On représente sur la Figure 6.26 l'évolution de la carte de déformation en épaisseur ainsi que l'évolution des prédictions du critère de striction. Nous remarquons d'abord que la méthode de continuation est en mesure de simuler la mise en forme de cette pièce. La courbe d'évolution de la pression est tracée en fonction de la hauteur de trois points (A,B,C) situés sur la surface intérieure de la tôle (Figure 6.27). Le point A correspond au point le plus avancé lors de la phase de gonflage libre. Ce dernier entrera en contact avec la matrice le premier ; c'est ce qui correspond au segment vertical sur la courbe de pression (Figure 6.27). Les deux points B et C suivent une courbe de pression très comparable à celle du point A mais décalée dans le temps. Ce décalage s'explique par leur rigidité géométrique supplémentaire.

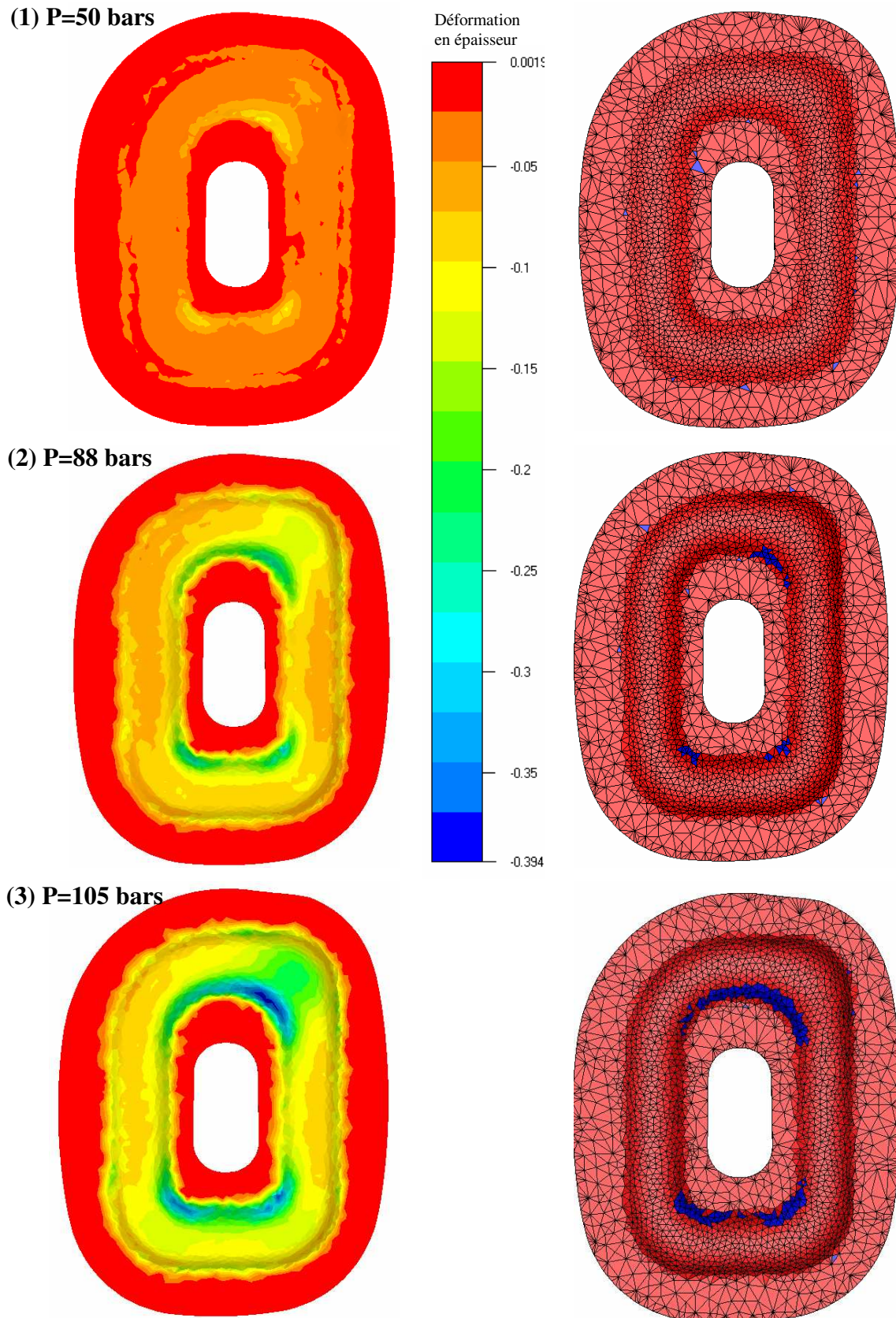


Figure 6.26 : Isovaleurs de la déformation en épaisseur (à gauche) et du critère FMM (à droite).

Nous remarquons que l'entrée en contact entre la tôle et la matrice est identifiée par le pic de pression du point A (courbe du point A sur la Figure 6.27). L'entrée en contact semble stabiliser la structure puisqu'on n'observe pas de phase descendante sur la courbe de pression.

Par ailleurs, nous remarquons que la striction détectée par le critère de FMM (Figure 6.26) apparaît pendant la phase stable de l'écoulement (Figure 6.27). A noter que dans la zone de striction, le mode de déformation est proche d'un mode de déformation plane, pour lequel on a déjà souligné (gonflage annulaire) la formation de la striction durant la phase stable.

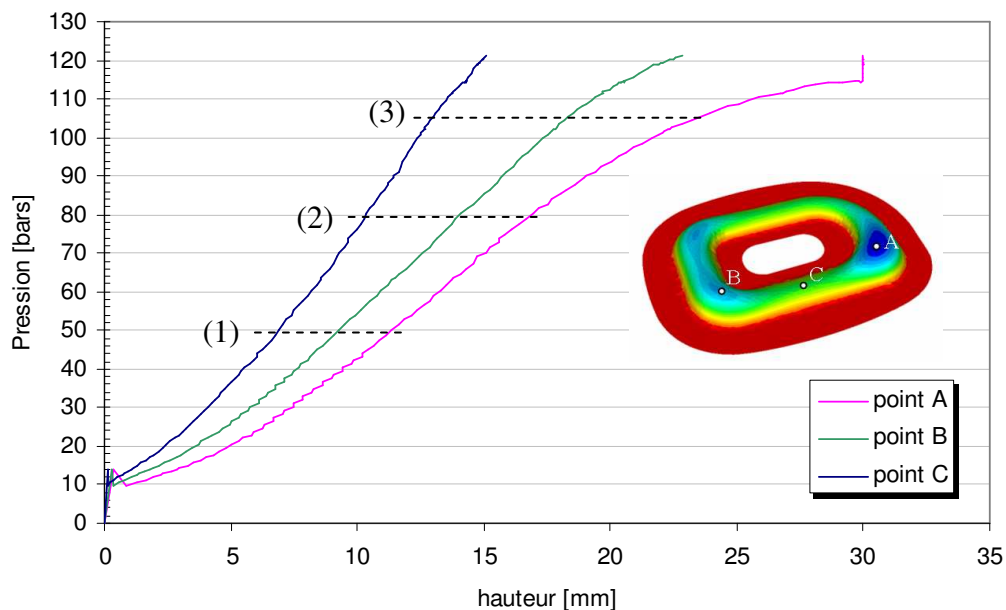


Figure 6.27 : Courbes d'évolution de la pression en fonction de la hauteur.

Ce calcul montre l'aptitude de l'algorithme à simuler la phase de gonflage libre et de contact. Toutefois, les conditions opératoires considérées ne mettent pas en évidence une phase de déformation instable (décroissance de la pression) pour laquelle la méthode de la longueur d'arc pourrait être utile.

#### 6.3.4. Cas d'une pièce de carrosserie d'automobile

La Figure 6.28-a représente la partie extérieure d'une pièce réalisée par hydroformage de flans doubles. Nous avons effectué la simulation de cette pièce par hydroformage simple avec une montée en pression de 2.9 bars/s et un jeu de 0.5 mm. Le maillage comporte 356 680 nœuds et 142 056 éléments.

Le résultat obtenu sur la Figure 6.28-b montre l'aptitude du code à simuler une pièce aussi complexe. Comparé avec l'expérience, on retrouve par le biais de la simulation les zones d'amincissement critiques situées au niveau des coins. D'un point de vue quantitatif, des écarts en terme d'avalement du

flan et en terme de niveau de déformation sont visibles. Ces écarts peuvent être attribués à plusieurs facteurs ; erreurs de positionnement de la tôle, difficultés de reproduire les conditions expérimentales exactes puisque des inserts servant au contrôle de l'avalement intérieur et extérieur de la tôle n'ont pas été pris en compte dans le modèle numérique. Enfin, la simulation en matrice simple au lieu d'une simulation complète en matrice double, peut aussi contribuer aux écarts observés.

A ce jour, la principale limitation reste le temps de calcul qui est relativement élevé. Le ralentissement de la vitesse de convergence de la méthode de Newton-Raphson et celle du solveur linéaire sont à l'origine de l'accroissement du temps de calcul. En effet, des difficultés de convergence du solveur linéaire itératif augmente, d'une part, le temps de calcul global et empêche, d'autre part, la convergence vers des résidus suffisamment faibles. De ce fait, l'accroissement du résidu du solveur linéaire affecte négativement la convergence de la méthode de N-R.

Les difficultés de convergence rencontrées par le solveur linéaire itératif sont étroitement liées au mauvais conditionnement de la matrice de raideur du système.

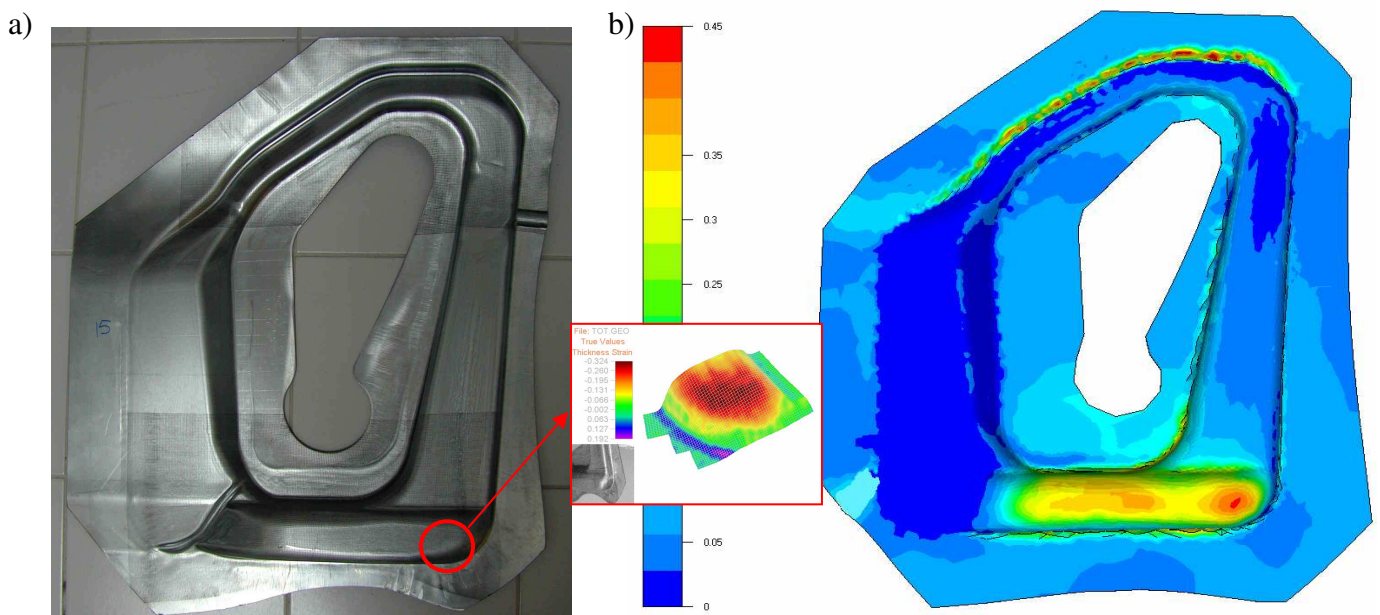


Figure 6.28 : Courbe d'évolution de la pression de gonflage d'un tube en fonction de son rayon extérieur.



## 6.4. Hydroformage de tube

### 6.4.1. Etude du gonflage d'un tube de longueur finie

Tout comme l'hydroformage de flans, l'hydroformage de tubes consiste à déformer sous l'action d'une pression hydrostatique, une préforme de forme tubulaire.

Nous considérons un tube d'aluminium de longueur  $l = 150 \text{ mm}$ , de diamètre extérieur  $d = 70 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $e = 3.78 \text{ mm}$ , ses deux extrémités supérieure et inférieure sont bloquées. Le comportement du matériau est défini par une loi élasto-plastique dont les paramètres sont reportés dans le Tableau 6-5.

**Tableau 6-5** : Paramètres rhéologiques du matériau.

Module de Young	70 GPa
Coefficient de Poisson	0.3
Loi d'écrouissage	$285(\bar{\epsilon})^{0.24}$
Critère de plasticité	von Mises

En raison de la symétrie du problème, seule la moitié du tube sera simulée. Le maillage utilisé pour la simulation comporte 2160 nœuds et 11232 éléments avec deux éléments dans l'épaisseur (Figure 6.29).

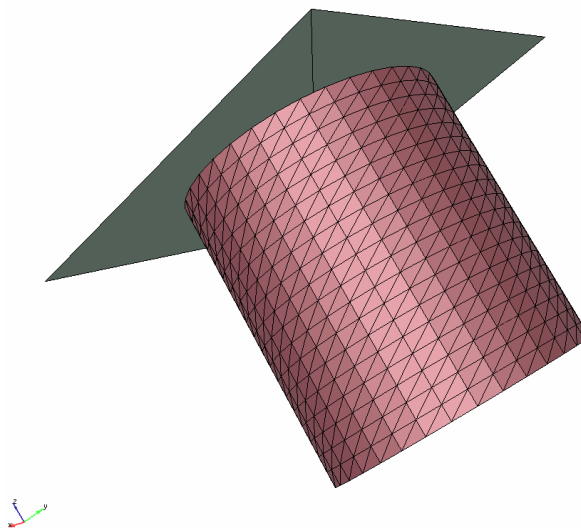


Figure 6.29 : Maillage du tube.

L'intérêt de ce test est qu'il présente un point limite se manifestant généralement dans les premiers stades de gonflage. Il est donc intéressant de comparer les performances du code de calcul Forge3® standard avec celles d'une méthode de continuation.

A cet effet, la simulation de l'essai avec Forge3® standard est effectuée avec une vitesse de montée en pression de 0.3 bars/s. Le même essai est également simulé avec la méthode de continuation par

longueur d'arc linéarisée (cf. chap.5 §4). La longueur de contrôle est de 10 mm et la vitesse de montée en pression est de 0.3 bars/s.

La Figure 6.30 démontre qu'à la différence de la méthode standard, la méthode de continuation reproduit bien la phase instable du gonflage marquée par une décroissance de la pression. Bien qu'on ne dispose pas de mesures expérimentales pour la validation, il est manifeste que les prédictions de la méthode de continuation seraient plus proches de la physique.

Par ailleurs, la Figure 6.31-a montre qu'au voisinage du maximum de pression, la méthode standard est assez sensible au pas de temps, son utilisation nécessite donc un pas de temps assez faible ce qui est pénalisant en terme de temps de calcul. En revanche, la méthode de continuation montre une plus grande stabilité (Figure 6.31-b). Cette stabilité est probablement due à l'algorithme de prédiction-correction de la méthode.

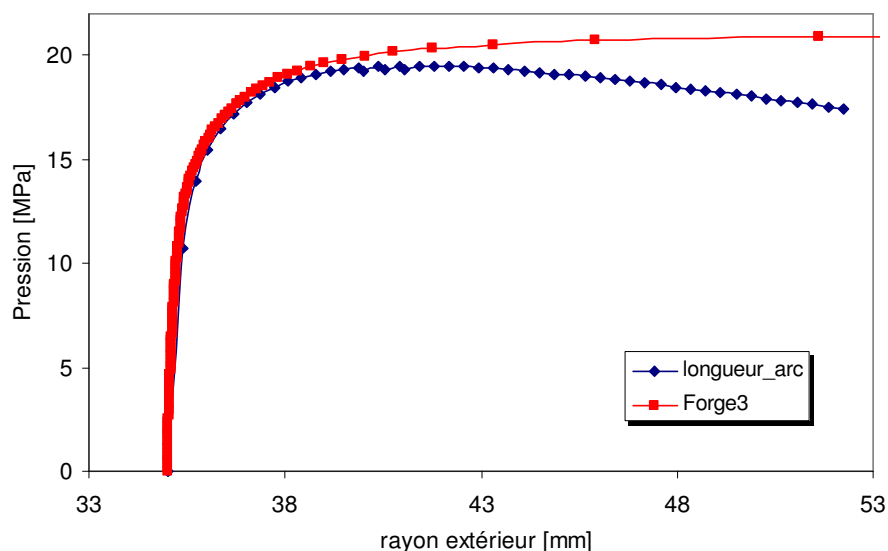


Figure 6.30 : Courbe d'évolution de la pression de gonflage d'un tube en fonction de son rayon extérieur.

La Figure 6.32 montre l'évolution de la géométrie du tube au cours de la simulation par la méthode de la longueur d'arc. Ces résultats vont au-delà de la capacité physique de déformation du matériau, celle-ci correspond à un rayon extérieur maximal de 42mm d'après les prédictions du critère de FMM. Toutefois, il est intéressant de noter qu'au cours du chargement, le mode de déformation du tube évolue vers un mode de déformation non symétrique. Il serait intéressant de vérifier sur des matériaux très déformables (gonflage à chaud, matériau hyper-élastique..) si le mode non symétrique observé au cours de la simulation correspond à des modes physiques ou s'il est la conséquence d'accumulation d'erreurs de calcul qui s'amplifient pendant la phase instable.

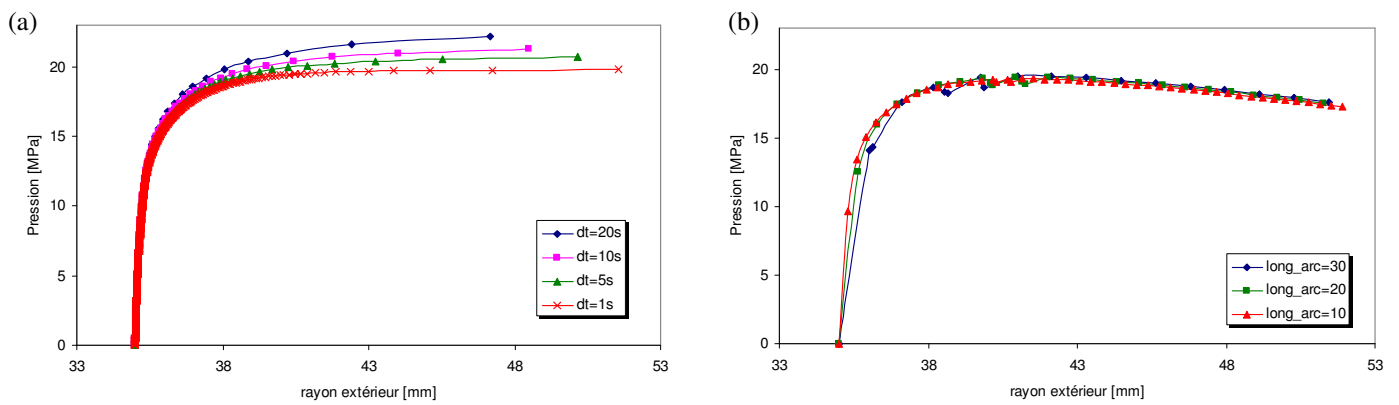


Figure 6.31 : Effet du pas de temps sur l'évolution de la courbe pression en fonction du rayon extérieur.  
a/ méthode de contrôle d'effort (Forge3® standard). b/ méthode de longueur d'arc linéarisée.

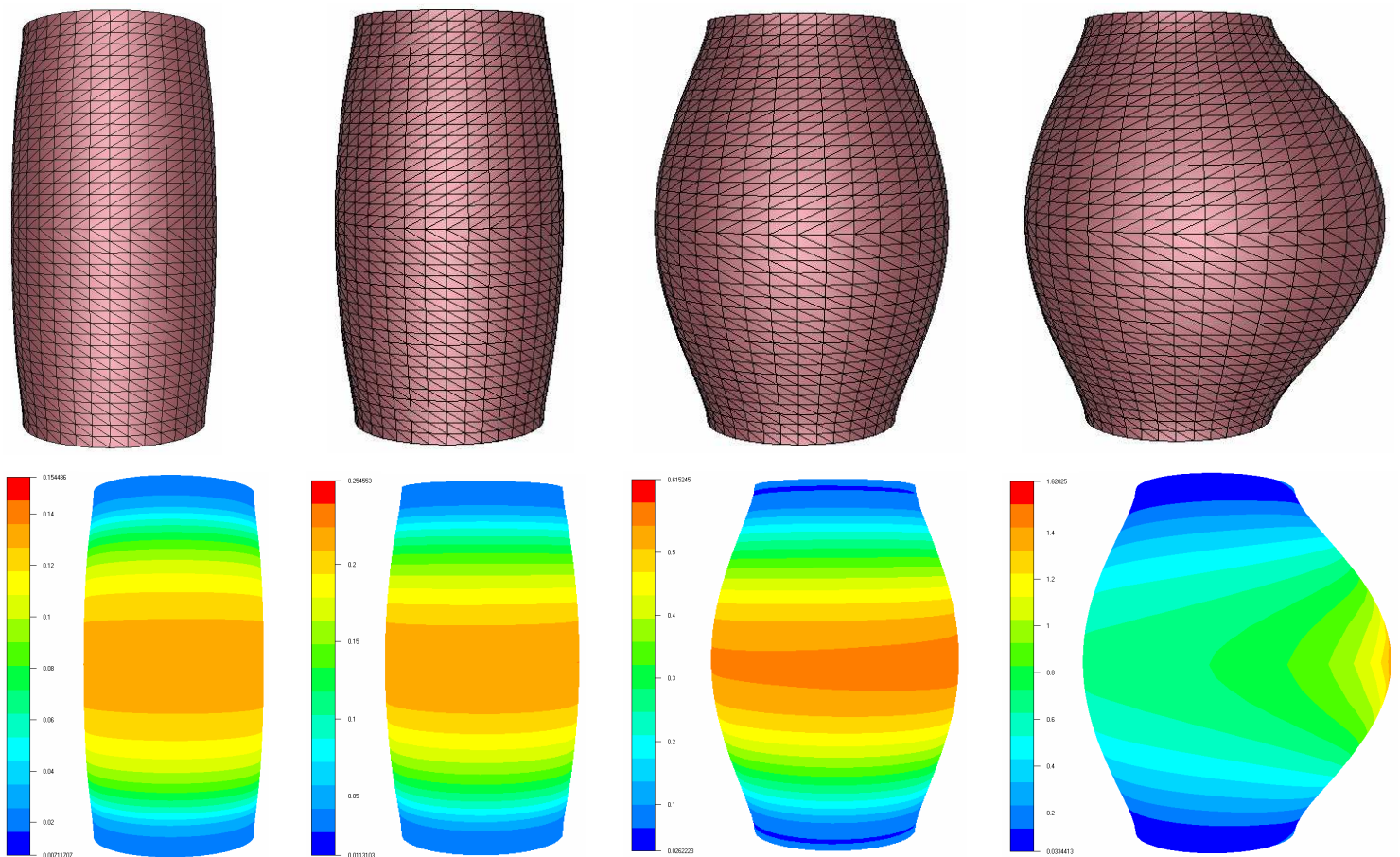


Figure 6.32 : Evolution d'un tube de longueur finie.



### 6.4.2. Etude de l'effet du chemin de déformation

Le gonflage, conjugué avec une compression latérale est un moyen souvent utilisé pour améliorer la formabilité des tubes. On se propose d'analyser les effets de la compression sur les chemins de déformation et sur la formabilité. On se base pour cette étude sur les travaux de Kulkarni [Kulkarni et al, 2004] qui présentent des mesures expérimentales de l'effet du chemin de déformation sur l'hydroformage des tubes. Par ailleurs, ne disposant que de la limite élastique et de l'allongement uniforme du matériau, on a donc estimé une loi d'écrouissage dont les paramètres ont été indiqués dans le Tableau 6-5.

La compression latérale est contrôlée par un déplacement axial supposé proportionnel à la pression de gonflage. Trois vitesses de chargement sont étudiées 0.3 mm/MPa ; 0.6 mm/MPa ; 0.9 mm/MPa.

Les résultats de la simulation pour les trois chargements indiqués sont reportés dans l'espace conventionnel des déformations principales (Figure 6.33). On remarque la forte non linéarité des chemins qui sont marqués par une tendance asymptotique verticale en fin de chargement.

Si une CLF linéaire est utilisée pour la détection de la striction (Figure 6.33), il apparaît alors que la déformation limite augmente avec la vitesse de chargement. A présent, on transpose les chemins de déformation obtenus sur la Figure 6.33 dans l'espace des déformations équivalentes (Figure 6.34). Sur cette dernière on note que les chemins de déformation pour les différentes configurations de chargement démarrent avec des rapports de déformation très faibles, ensuite les chemins s'écartent et se rejoignent à la fin des essais pour tendre vers un état de déformation plane. De ce fait, la déformation limite est identique pour les différents chemins ( $\bar{\epsilon} = 0.24$  ;  $\beta = 0$ ). Cette condition de striction se traduit, dans l'espace conventionnel de représentation des CLF, par une déformation majeure constante pour les différents chemins de chargement (Figure 6.33). Les mesures expérimentales de [Kulkarni et al, 2004] semblent confirmer que pour des chemins de déformation non linéaires, la striction apparaît à une déformation majeure constante (Figure 6.35).

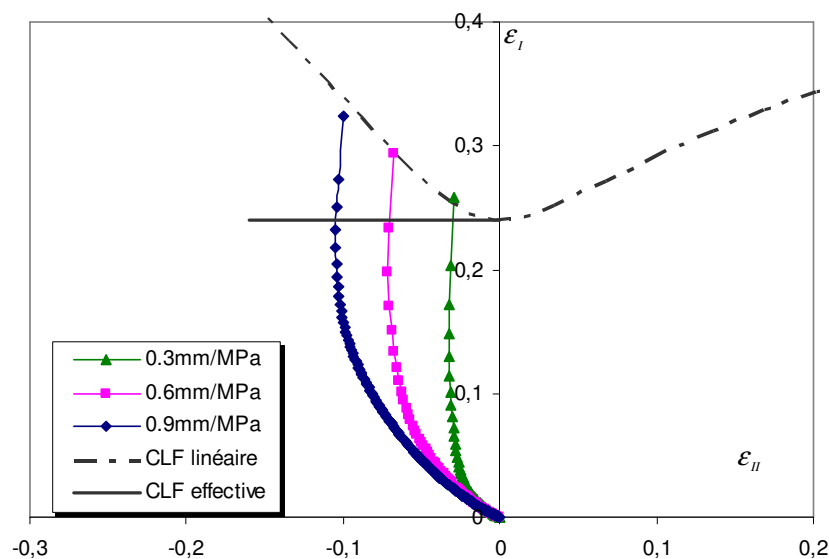


Figure 6.33: Chemins de déformation dans l'espace des déformations principales.

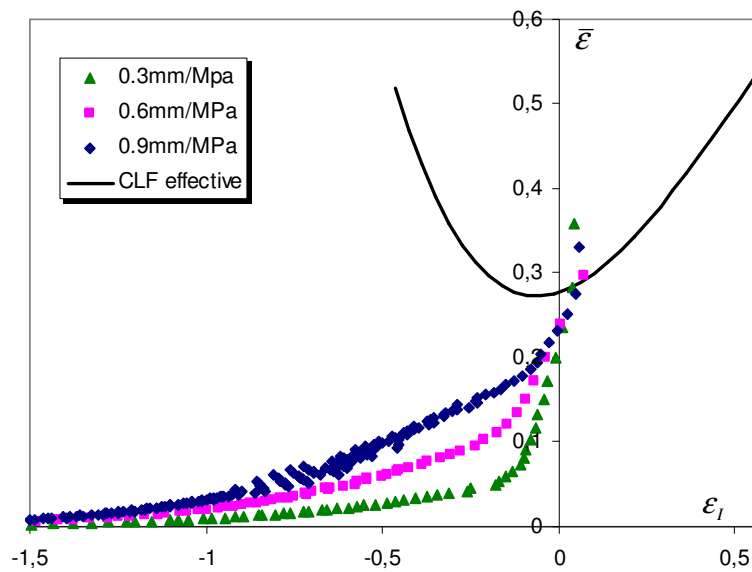


Figure 6.34 : Chemins de déformations dans l'espace des déformations équivalentes.

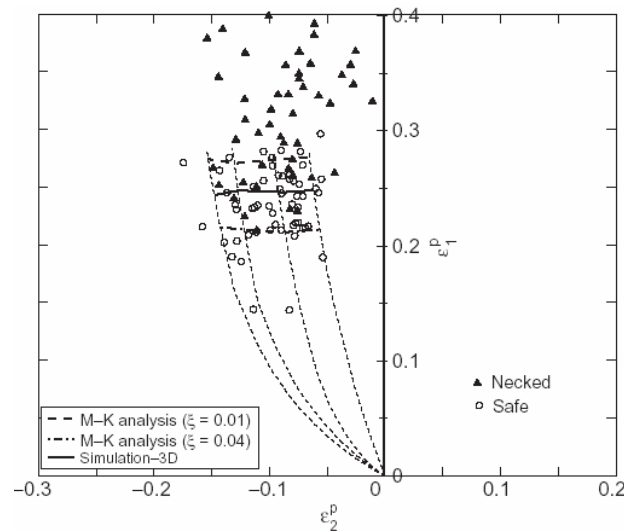


Figure 6.35 : Mesures expérimentales de la striction pour différents chemins de chargement [Kulkarni et al, 2004].

Cet exemple est une illustration de l'importance des chemins de déformations sur l'apparition de la striction. Il est ainsi montré que l'utilisation de CLF linéaire peut conduire à une surestimation de la déformation à striction lorsque le chargement est non linéaire.

L'exemple met également en avant l'utilité d'une représentation des CLF dans l'espace  $(\beta, \bar{\epsilon})$ . Cet espace se révèle pertinent pour tenir compte de l'influence des non linéarités de chargement et permet de retrouver les observations expérimentales pour les niveaux de déformation mis en jeux.

## 6.5. Vers le soufflage de bouteille en polymère

Le soufflage des bouteilles en polymère est un procédé qui repose sur le même principe que le procédé d'hydroformage ; un gaz sous pression vient gonfler une préforme en PET contre une matrice creuse. La principale caractéristique des matériaux polymères est leur capacité à subir de fortes déformations sans ruine (pouvant atteindre 400%). Le comportement du PET s'intègre dans le cadre des lois hyper-élastiques. Le modèle de Mooney-Rivlin décrit ce comportement. Il a fait l'objet d'une étude, et a été implémenté dans le code Forge3® par Champin [Champin, 2005].

Nous considérons ici l'exemple d'une sphère hyper-elastique sous pression. Le rayon initial intérieur de la sphère est  $R_0 = 5mm$  et l'épaisseur initiale  $e_0 = 2mm$ . Une expression analytique reliant la pression de gonflage au rayon intérieur normalisé est donnée par [Champin, 2005] :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\lambda^3 - 1}{(1 + \delta_o)^3}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\lambda^4} + 2\alpha \left[ \left(1 + \frac{\lambda^3 - 1}{(1 + \delta_o)^3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\lambda^2} \right] + 4 \left[ \left(1 + \frac{\lambda^3 - 1}{(1 + \delta_o)^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\lambda} \right] \\ & - 4\alpha \left[ \left(1 + \frac{\lambda^3 - 1}{(1 + \delta_o)^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \lambda \right] = \frac{P}{C} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Avec  $\lambda = R/R_0$  et  $\delta_o = e_o/R_0$ .  $C$  et  $\alpha$  sont des constantes du matériau.

Nous avons ensuite simulé le même test en considérant, par symétrie, 1/32 de la sphère (Figure 6.36). La figure 6.37 montre le résultat de la simulation par la méthode de la longueur d'arc linéarisée. Ce test montre encore une fois la capacité de la méthode à dépasser le pic de pression. Malheureusement, des difficultés de convergence ont été rencontrées au passage du point d'inflexion et nécessiteraient donc plus d'investigations.

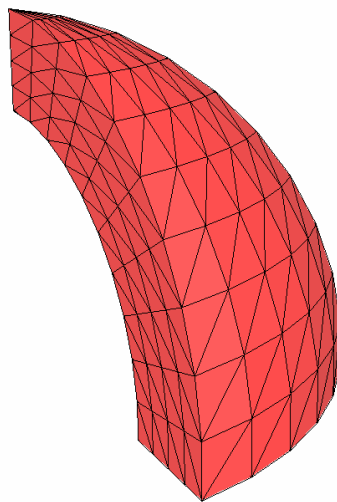


Figure 6.36 : Maillage de la sphère.

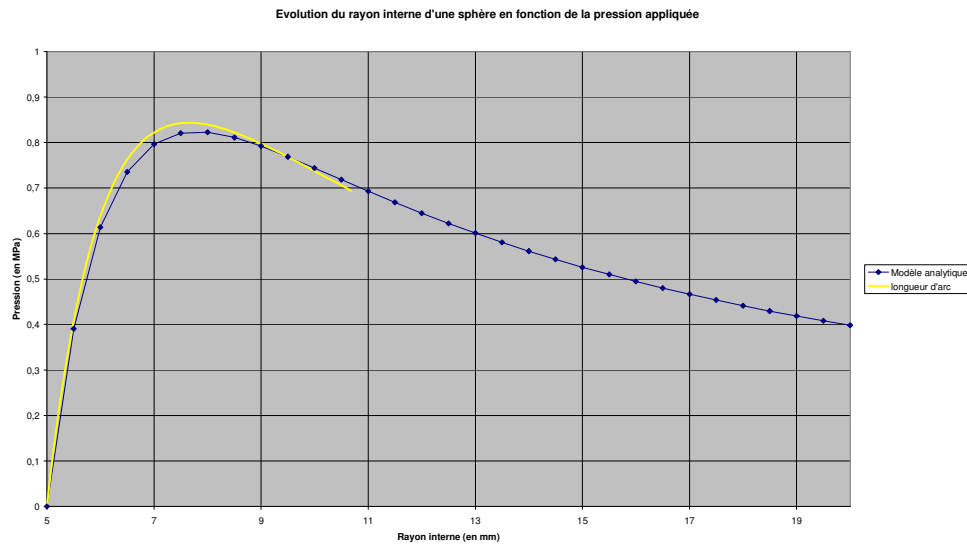


Figure 6.37 : Evolution du rayon intérieur d'une sphère en fonction de la pression appliquée.

## **Références**

Champin, C. (2005), *Modélisation 3D du chauffage par transferts convecto radiatifs et du soufflage biétirage de bouteilles en polyéthylène téréphthalate*, thèse de l'Ecole des Mines de Paris en cours (soutenance fin 2005).

Geiger, M.; Celeghini, M. (2002), *Double sheet hydroforming of complex hollow parts*. Proc. Of the 7<sup>th</sup> ICTP, Yokohama, 2002, pp. 991-996.

Hein, P.; Vollersten, F. (1999), *Hydroforming of sheet metal pairs*. Journal of Materials Processing Technology, 87 (1999), pp. 154-164.

Kulkarni, A.; Biswas, P.; Narasimhan, R.; Luo, A.A. ; Mishra, R.K.; Stoughton, T.B.; Sachdev, A.K. (2004), *An experimental and numerical study of necking initiation in aluminium alloy tubes during hydroforming*. Inter. J. Mech. Sci. 46 (2004), pp. 1727-1746.

Pasino, R.; Brun, R.; Fuganti, A. (2002), *Development of double sheet hydroforming technology*. Society of Automotive Engineers, 02IBECC-34.

Sleiniute, V. (2004), *Etude de l'hydroformage*, rapport de stage, CEMEF.



# *Conclusion et perspectives*

Dans ce mémoire nous avons abordé le problème de la modélisation du procédé d'hydroformage en adoptant à la fois une approche expérimentale pour la caractérisation des matériaux et une approche numérique pour la simulation du procédé.

Après avoir rappelé les caractéristiques principales de ce procédé, nous nous sommes ensuite intéressés à l'identification des courbes d'écrouissage en grandes déformations via l'analyse de l'essai de gonflage circulaire. L'utilisation d'un modèle homogène pour le dépouillement de cet essai a montré des résultats satisfaisants grâce notamment à une détermination locale du rayon de courbure fournie par un système de mesure par corrélation d'images. Dans la même optique d'identification des lois d'écrouissage, l'essai de cisaillement double a également fait l'objet de quelques investigations. Des limitations en terme d'homogénéité, de nécessité de mesure locale des déformations et de considération des rotations plastiques semblent montrer la difficulté d'un dépouillement analytique précis de cet essai.

La striction localisée constitue l'un des défauts majeurs pouvant survenir au cours de la mise en forme des produits minces en général et en hydroformage en particulier. Son étude constitue donc un impératif pour la maîtrise du procédé. Nous avons à cet effet déterminé expérimentalement les Courbes Limites de Formage des différentes nuances étudiées. Sur ce point, il est à noter qu'un besoin de standardisation de ces essais se fait de plus en plus nécessaire dans les milieux industriels.

Le deuxième volet de l'étude a porté sur la modélisation analytique de la striction. De tels modèles sont forts utiles pour la prédiction de la striction en simulation numérique par la méthode des éléments finis. La littérature révèle plusieurs approches reposant sur différentes hypothèses pour la modélisation de la striction. Ainsi, si la théorie de la bifurcation repose sur la discontinuité du gradient de la vitesse au niveau de la bande de localisation, la méthode de perturbation considère la striction comme une instabilité de l'écoulement local. Outre ces deux théories générales, le modèle du défaut initial (modèle M-K) et les modèles d'instabilité de l'effort constituent les deux autres approches spécifiques à l'étude de la striction.

Le Critère de Force Maximum Modifié, reposant sur l'instabilité de l'effort, a fait l'objet d'une étude approfondie dans laquelle nous avons abordé l'effet du critère de plasticité. Il a été démontré que la forme locale de la surface de charge constitue le facteur influant sur les prédictions. Par opposition, la

forme globale (écart entre contrainte plane et contrainte équi-biaxiale) est connue pour conditionner les prédictions du modèle du défaut initial M-K. Le problème de la dépendance des CLF au chemin de déformation a été abordé. Nous avons pu mettre l'accent sur l'utilité d'une représentation des CLF dans l'espace des déformations équivalentes pour s'affranchir de la dépendance au chemin observée dans l'espace conventionnel des déformations principales. Enfin, nous avons proposé un modèle intégrant l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation dans la formulation du CFMM. La confrontation avec des résultats expérimentaux de tôles en acier montre une amélioration des prédictions de CLF, mais le modèle reste toutefois assez conservatif.

Le deuxième volet de ce travail a concerné la modélisation numérique du procédé d'hydroformage. Le code de calcul Forge3® est la base des développements. Ce code repose sur une formulation lagrangienne actualisée en vitesse-pression et utilise une méthode de contrôle de pression pour la simulation de l'hydroformage.

Un schéma d'intégration complètement implicite reposant sur une actualisation itérative du maillage et tenant compte des dérivées de domaine, calculées par différences finies, a pu être testé dans le but d'améliorer la qualité de la solution et réduire les temps de calcul. Les résultats ont confirmé la faible influence des dérivées de domaine. En revanche, une actualisation itérative semble montrer une meilleure conservation du volume et une régularisation de la solution. Aussi, et en terme de régularisation, l'introduction de la sensibilité à la vitesse de déformation semble améliorer la convergence des calculs.

Certains matériaux peuvent présenter un potentiel de déformation au-delà du pic de pression considéré souvent comme la limite de formabilité du matériau. Tenir compte de ce potentiel relève de l'exploitation optimale des possibilités du matériau. Afin de pouvoir simuler correctement ce type de comportement, nous avons donc développé plusieurs variantes de la méthode de continuation. Reposant sur une technique de prédiction et de correction, celles-ci sont en mesure de dépasser les pics de pression qui constituent des points infranchissables pour la méthode conventionnelle de contrôle de pression.

La validation, en dernier chapitre, du critère de FMM par comparaison à différents essais expérimentaux (gonflage circulaire, elliptique, annulaire) a montré l'aptitude de ce critère à la fois à situer l'emplacement et globalement l'instant d'apparition de la striction au cours d'une simulation numérique. Également, l'intérêt d'une représentation des CLF dans l'espace des déformations équivalentes  $(\beta, \bar{\epsilon})$  a pu être testé sur un essai de gonflage de tube. Toutefois, d'autres validations expérimentales seront utiles afin de valider ces résultats pour les grandes pré-déformations.

Les méthodes de continuation ont pu être validées aussi bien sur des cas simples que sur des géométries plus évoluées. Ces méthodes ont montré une bonne stabilité au pas de temps. Aussi, de part leurs algorithmes, ces méthodes tolèrent des pas de temps plus grands qu'une méthode standard de contrôle de pression dans le cas de comportement non visqueux.

Outre l'hydroformage des matériaux métalliques, le soufflage des bouteilles en plastique constitue une application potentielle pour les méthodes de continuation. En effet, une majeure partie du potentiel de déformation des matériaux hyper-élastiques se situe après le pic de pression. Des tests préliminaires



sur une pièce de géométrie sphérique ont montré les capacités de la méthode de continuation. Malheureusement, des difficultés de convergence ont été rencontrées au passage de points d'inflexion et nécessiteraient donc plus d'investigations.

Les perspectives qui s'ouvrent à ce travail sont nombreuses :

- \* En terme de caractérisation du comportement, le modèle analytique homogène a fait ses preuves dans le dépouillement des essais circulaires. Dans la continuité, il pourrait être intéressant d'utiliser des méthodes inverses afin d'identifier les lois d'écrouissage et les paramètres d'anisotropie pour les essais elliptiques.

- \* Le domaine de l'étude de la striction reste un domaine ouvert. Les différentes approches présentées et étudiées dans le cadre de ce travail reposent sur un comportement élasto-plastique. L'endommagement en tant que loi de comportement conduisant à la ruine du matériau, ou bien en tant que loi de comportement pouvant être couplée aux modèles de striction, semble une perspective intéressante à explorer aussi bien au niveau expérimental que théorique.

L'effet de l'épaisseur sur les CLF est aujourd'hui avéré, sa modélisation et son intégration dans les modèles de striction constitue une deuxième perspective.

- \* Concernant le développement numérique, les différentes méthodes de continuation ont pu être validées. Un couplage entre la méthode de contrôle d'effort et les méthodes de continuation pourrait donc être intéressant à exploiter.

Par ailleurs, une optimisation du temps de calcul des méthodes de continuation se situerait au niveau de la double résolution du système linéaire. On songerait alors à tester une résolution complète (équilibre +équation contrainte) avec modification de la matrice de rigidité du système.

- \* L'implémentation des méthodes de continuation peut ouvrir d'autres perspectives de recherche, telle que le suivi des instabilités géométriques en calcul de structure ou le contrôle de propagation de fissure. Egalement, dans le domaine du formage superplastique, nous pensons que la structure de ces méthodes peut être adaptée à l'optimisation des chemins de pression.



# ***Annexes***

## Annexe A

Nous reconsidérons le cas d'un essai de cisaillement simple. On note par  $(1,2,3)$  le repère de l'essai, le repère d'orthotropie  $(x, y, z)$  est orienté d'un angle  $\theta$  par rapport au repère de l'essai (Figure A.1).

Dans le repère de l'essai, le tenseur de contrainte correspond à un état de cisaillement simple :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(1,2,3)} \quad (\text{A.1})$$

Pour un état de cisaillement simple, le repère principal des contraintes  $(I, II, III)$  est situé à  $\pi/4$  par rapport au repère de l'essai  $(1,2,3)$ . Il s'écrit indépendamment de  $\theta$  comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(I,II,III)} \quad (\text{A.2})$$

En se référant aux notations de la Figure A.1, l'angle entre le repère d'orthotropie  $(x, y, z)$  et le repère principal des contraintes  $(I, II, III)$  correspond à  $(\pi/4 - \theta)$ .

Dans le repère d'orthotropie le tenseur des contraintes s'obtient par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} = {}^T R \cdot \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(I,II,III)} \cdot R \quad (\text{A.3})$$

$\mathbf{R}$  la matrice de rotation définie par:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4 - \theta) & \sin(\pi/4 - \theta) & 0 \\ -\sin(\pi/4 - \theta) & \cos(\pi/4 - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Par identification des termes du système (A.3) on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\tau \cdot \cos 2\theta \\ \sigma_{yy} = \tau \cdot \cos 2\theta \\ \sigma_{xy} = \tau \cdot \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Dans le repère Euclidien (2.42) , le tenseur des contraintes (A.5) s'écrit:

$$\begin{cases} X = -\sqrt{2}\tau \cdot \cos 2\theta \\ Y = 0 \\ Z = \sqrt{2}\tau \cdot \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

L'angle  $\beta$  décrit l'orientation du repère principal des déformations par rapport au repère principal des contraintes (Figure A.1). En se référant à la relation (2.47), cet angle peut être déterminé par la relation suivante :

$$\tan(2\theta + 2\beta) = \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial Z}}{\frac{\partial \Theta}{\partial X}} \quad (\text{A.7})$$

Rappelons, par ailleurs, que le critère de Hill<sup>48</sup> s'écrit :

$$\Theta(X, Y, Z) = \frac{1}{2}(F + G + H)X^2 - (F - G)XY + \frac{1}{2}(F + G)Y^2 + NZ^2 = 1 \quad (\text{A.8})$$

En remplaçant (A.8) dans (A.7), l'angle  $\beta$  s'écrit :

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2N}{(F + G + H)} \cdot \tan(2\theta) \right] - \theta \quad (\text{A.9})$$

Si les coefficients de Hill sont identifiés à partir des coefficients de Lankford, l'angle  $\beta$  s'écrit alors:

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left[ 2 \cdot \frac{r_0 + 2r_{90}}{(r_0 + r_{90})(1 + 2r_{45})} \cdot \tan(2\theta) \right] - \theta \quad (\text{A.10})$$

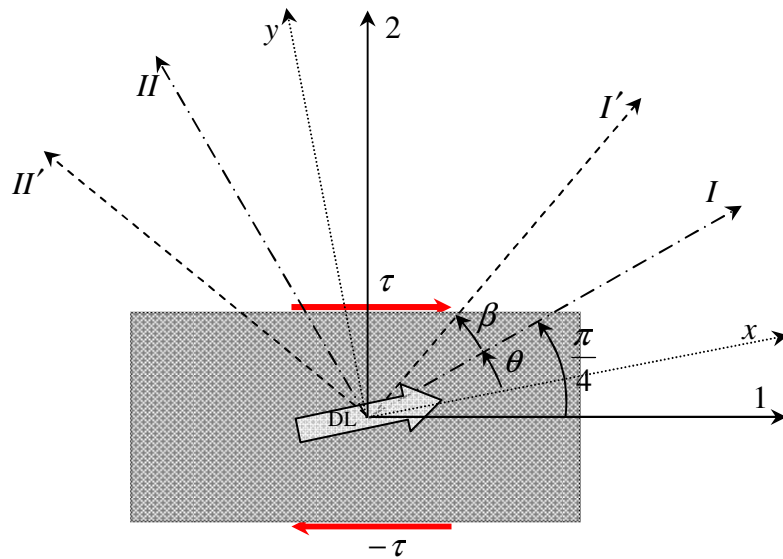


Figure A.1 : Paramétrage d'un essai de cisaillement hors axes.



## Annexe B

Nous commençons par rappeler l'expression du critère de Force Maximum Modifiée pour une loi d'érouissage de type puissance (3.131):

$$\frac{n}{\bar{\varepsilon}} = g(\beta) \left[ 1 + \frac{\frac{\partial \mathbf{f}(\Omega)}{\partial \Omega}}{\mathbf{f}(\Omega)} \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \frac{\beta}{\varepsilon_1} \right] = K(\beta, \bar{\varepsilon}) \quad (\text{B.1})$$

Pour des chemins linéaires (i.e  $\beta = cte \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 / g(\beta)$ ), l'expression précédente devient :

$$\bar{\varepsilon} = 1/g \left[ n - \frac{\frac{d\mathbf{f}}{\mathbf{f}}}{\frac{d\Omega}{\partial \Omega}} \frac{\beta}{\frac{\partial \beta}{\partial \Omega}} \right] \quad (\text{B.2})$$

L'hypothèse de linéarité permet une écriture simple et explicite de la déformation à striction qui devient fonction de:  $\mathbf{f}, d\mathbf{f}/d\Omega, \beta, d\beta/d\Omega$  et  $g$ .

### Calcul de $\beta$

Le coefficient  $\beta$  est défini par le rapport des incréments des déformations plastiques :

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2^p}{d\varepsilon_1^p} \quad (\text{B.3})$$

Or, d'après la loi d'écoulement plastique associée, le tenseur taux de déformation plastique est défini par :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1^p &= d\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \\ d\varepsilon_2^p &= d\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En combinant les équations (B.3) et (B.4), on obtient :

$$\beta = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2}}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1}} \quad (\text{B.5})$$

Par ailleurs, la contrainte équivalente exprimée dans le repère des contraintes principales peut s'exprimer en fonction de la contrainte majeure  $\sigma_1$  et du rapport des contraintes  $\Omega = \sigma_2 / \sigma_1$  :

$$\bar{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2) = \tilde{\sigma}(\sigma_1, \Omega) \quad (\text{B.6})$$

La différentielle totale de  $\tilde{\sigma}$  conduit à :

$$d\tilde{\sigma}(\sigma_1, \Omega) = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma_1} . d\sigma_1 + \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Omega} . d\Omega \quad (\text{B.7})$$

à partir de la définition de  $\Omega$ , on déduit la relation suivante :

$$d\Omega = -\frac{\Omega}{\sigma_1} d\sigma_1 + \frac{d\sigma_2}{\sigma_1} \quad (\text{B.8})$$

En introduisant (B.8) dans (B.7), on obtient :

$$d\tilde{\sigma} = \left[ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma_1} - \frac{\Omega}{\sigma_1} \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Omega} \right] d\sigma_1 + \left[ \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Omega} \right] d\sigma_2 \quad (\text{B.9})$$

D'après l'équation (B.6), les différentielles totales de  $\bar{\sigma}$  et  $\tilde{\sigma}$  sont égales. Par conséquent, en utilisant une identification terme à terme à partir de l'équation précédente, il est possible de déduire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} &= \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma_1} - \frac{\Omega}{\sigma_1} \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} &= \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Par définition (3.115), la fonction  $\tilde{\sigma}$  s'écrit:

$$\tilde{\sigma}(\sigma_1, \Omega) = \sigma_1 / \mathbf{f}(\Omega) \quad (\text{B.11})$$

A partir de cette relation on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma_1} &= \frac{1}{\mathbf{f}} \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Omega} &= -\sigma_1 \frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{f}^2} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

En introduisant ces fonctions dans l'équation (B.10), et en reprenant la définition de l'équation (B.5), le rapport  $\beta$  s'écrit alors:

$$\beta(\Omega) = \frac{-\frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{f}^2}}{\frac{1}{\mathbf{f}} + \Omega \frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{f}^2}} = \frac{-\mathbf{f}'}{\Omega \mathbf{f}' + \mathbf{f}} \quad (\text{B.13})$$

### Calcul de $\partial\beta/\partial\Omega$

Partant de l'expression (B.13), il est possible de déduire la dérivée suivante:

$$\frac{d\beta}{d\Omega} = \frac{2\mathbf{f}'^2 - \mathbf{f}''\mathbf{f}}{[\Omega + \mathbf{f}]^2} \quad (\text{B.14})$$



Calcul de  $g$ 

En utilisant sa définition (3.124) ainsi que l'équation (B.13), la fonction  $g$  s'écrit:

$$g = \frac{\Omega \mathbf{f}' + \mathbf{f}}{\mathbf{f}^2} \quad (\text{B.15})$$

Finalement, la combinaison des équations (B.13), (B.14), (B.15) avec l'équation (B.2) conduit à l'expression recherchée du critère de striction:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(\Omega) &= \frac{\mathbf{f}^2}{\Omega \mathbf{f}' + \mathbf{f}} \left[ n - \frac{\Omega \mathbf{f}'^3 + \mathbf{f} \mathbf{f}'^2}{\mathbf{f}'' \mathbf{f}^2 - 2 \mathbf{f} \mathbf{f}'^2} \right] \\ \beta(\Omega) &= \frac{-\mathbf{f}'}{\Omega \mathbf{f}' + \mathbf{f}} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Ou encore en terme des déformations principales :

$$\begin{aligned} \varepsilon_I(\Omega) &= \left[ n - \frac{\Omega \mathbf{f}'^3 + \mathbf{f} \mathbf{f}'^2}{\mathbf{f}'' \mathbf{f}^2 - 2 \mathbf{f} \mathbf{f}'^2} \right] \\ \varepsilon_{II}(\Omega) &= \frac{-\mathbf{f}'}{\Omega \mathbf{f}' + \mathbf{f}} \left[ n - \frac{\Omega \mathbf{f}'^3 + \mathbf{f} \mathbf{f}'^2}{\mathbf{f}'' \mathbf{f}^2 - 2 \mathbf{f} \mathbf{f}'^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Dans cette expression on note que pour un chemin de déformation donné par le rapport des contraintes  $\Omega$  (ou le rapport des déformations  $\beta$  correspondant), la déformation limite est complètement définie par les fonctions  $\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}''$ . Une expression analytique de ces fonctions est facilement déductible pour des critères quadratiques. Pour des critères non quadratiques les expressions sont un peu plus fastidieuses à calculer analytiquement, c'est pourquoi on a eu recours aux dérivées numériques:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(\Omega) &= \frac{\mathbf{f}(\Omega + \varepsilon) - \mathbf{f}(\Omega)}{\varepsilon} \\ \mathbf{f}''(\Omega) &= \frac{\mathbf{f}(\Omega + 2\varepsilon) - 2\mathbf{f}(\Omega + \varepsilon) + \mathbf{f}(\Omega)}{\varepsilon^2} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

où  $\varepsilon$  représente la perturbation dont la valeur est de  $10^{-6}$ . Des logiciels de calcul formel peuvent également être utilisés pour le calcul de ces dérivées.

## Annexe C

Chaque élément du maillage peut être considéré comme étant la transformation de l'élément de référence par l'application suivante :

$$F : \xi \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi) = F(\xi) \quad (\text{C.1})$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur des coordonnées défini dans le repère global et  $\xi$  est le vecteur des coordonnées du même point décrit dans le repère de référence (Figure 4.1).

Il est possible d'exprimer le vecteur  $\mathbf{x}$  en fonction des coordonnées des nœuds de l'élément auquel il appartient :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 X_i^n \cdot N^n \quad (\text{C.2})$$

avec  $N^n$  la fonction d'interpolation associée au nœud  $n$  et  $X^n$  le vecteur coordonnées du même nœud. La normale locale au point de coordonnées  $\mathbf{x}$  est définie par :

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\|} \quad (\text{C.3})$$

La différentielle totale de cette normale est déduite par [Hama et al, 2001] :

$$\Delta \mathbf{n} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\|} \begin{pmatrix} e_{1,jk} \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_l}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_l}{\partial \xi} \right) \Delta x_k^l \\ e_{2,jk} \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_l}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_l}{\partial \xi} \right) \Delta x_k^l \\ e_{3,jk} \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_l}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_l}{\partial \xi} \right) \Delta x_k^l \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

où la fonction permutation  $e_{ijk}$  est définie par :

$$\begin{aligned} e_{ijk} &= 1 && \text{si permutation circulaire } e_{123}, e_{312}, e_{231} \\ e_{ijk} &= -1 && \text{si permutation non circulaire } e_{213}, e_{132}, e_{321} \\ e_{ijk} &= 0 && \text{si indicie répété } e_{112}, e_{223}, e_{331}, \dots \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

